Дисциплина «**Теоретическая механика**» относится к блоку математических и естественно-научных дисциплин (федеральный компонент), является обязательным курсом.
Изучаются основные методы аналитического описания движения элементарных механических систем – методы Лагранжа, Гамильтона и Гамильтона-Якоби. Исследуется связь законов сохранения с симметриями пространства и времени. Выводится основной интегральный принцип механики – принцип наименьшего действия, с помощью которого строится метод канонических преобразований. Подробно разбираются применения этих методов к системам с кулоновским взаимодействием – атомам и молекулам. Полученные знания закрепляются на семинарских занятиях путем общего подробного разбора примеров и задач, а также самостоятельной работой студентов. Успеваемость студентов оценивается по результатам двух практических контрольных работ и одной общетеоретической. Курс читается в **4-м семестре** студентам **2-го года обучения**.

Цели и задачи освоения дисциплины:
Целью курса является научить студентов строить аналитические модели для описания классических элементарных систем с нелинейными взаимодействиями и применять основные методы аналитической механики для нахождения законов движения атомов и молекул.

Требования к результатам освоения содержания дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:
знать основные методы теоретической механики;
уметь строить аналитические модели элементарных механических систем;
владеть методами нахождения законов движения систем с нелинейными взаимодействиями;
иметь опыт решения простейших задач теоретической механики.

Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 108 часов, из них 16 часов лекций, 32 часа – семинары и 60 часов - самостоятельная работа.

Вид работы	Всего
Общая трудоёмкость, акад. часов	108
Аудиторная работа:	48
Лекции, акад. часов	16
Семинары, акад. часов	32
Самостоятельная работа, акад. часов	60
Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)	зачет

Лекции

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Метод Лагранжа	Уравнения Лагранжа для систем с идеальными голономными связями
		Функция Лагранжа заряда в электромагнитном поле
		Законы сохранения обобщенной энергии и обобщенного импульса
		Задача двух тел. Задача Кеплера
2	Метод Га-	Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона
		Принцип наименьшего действия

	мильтона	Канонические преобразования
3	Метод Гамильтона-Якоби	Действие как функция координат и времени. Уравнение Гамильтона-Якоби
		Метод разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

Семинары

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Метод Лагранжа	Повторение методов нахождения закона движения систем с линейными взаимодействиями. Обобщенные координаты и функция Лагранжа в потенциальных полях при наличии связей
		Разбор примеров на построение обобщенного потенциала и уравнений Лагранжа для движения в однородном магнитном поле, поле провода с током и поле магнитного и электрического диполей.
		Построение выражений для обобщенных энергии и импульса систем и интегрирование уравнений движения систем со связями.
		Нахождение уравнений траекторий и законов движения в системах с центральным взаимодействием. Законы Кеплера. Задача рассеяния.
2	Метод Гамильтона	Построение функции Гамильтона и уравнений Гамильтона. Применения теоремы Пуассона.
		Интегрирование уравнений Гамильтона. Оптико-механическая аналогия.
		Применение канонических преобразований для интегрирования уравнений движения.
3	Метод Гамильтона-Якоби	Построение уравнения Гамильтона-Якоби для простейших механических систем.
		Нахождение законов движения систем с помощью метода разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

Расчетные задачи

1) Найти число степеней свободы систем: материальная точка на сфере; две точки, связанные невесомым стержнем; тонкий массивный стержень; молекула H_2O (с учётом электронных степеней свободы и без).

2) Построить функцию Лагранжа систем: двойной математический маятник; точка на сфере в поле тяжести; заряд в однородных электрическом и магнитном полях; заряд в поле электрического диполя.

3) Получить уравнения Лагранжа системы, функция Лагранжа которой

$$L(x,\dot{x}) = e^{\lambda t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2), \quad \lambda, \omega = const$$

4) Найти обобщенную энергию системы, функция Лагранжа которой

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 \dot{x}^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2; \quad \alpha, \beta, \omega = const.$$

5) Точка подвеса математического маятника массы m и длины l движется под углом α к горизонту по закону $s = \frac{at^2}{2}$, $a = const.$ Записать функцию Лагранжа и уравнения Лагранжа для данной системы.

6) Найти функцию Лагранжа частицы, если её функция Гамильтона

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - (\vec{p},\vec{a}), \quad \vec{a} = const.$$

Построить уравнения Гамильтона.

7) Функция Гамильтона частицы имеет вид

$$H(\vec{r},\vec{p}) = c(\vec{r})\,|\,\vec{p}\,|,$$

где $c(\vec{r})$ – заданная функция координат. Построить уравнения Гамильтона.

8) Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией $\Phi(\vec{r},\vec{P}) = (\vec{r},\vec{P}) + (\delta\vec{a},\vec{P}),$ где $\delta\vec{a}$ - малый вектор.

9) Найти функцию Гамильтона материальной точки в однородном поле тяжести в декартовых координатах, построить уравнения Гамильтона и проинтегрировать их при произвольных начальных условиях.

10) Найти закон свободного движения материальной точки массы *m* методом

<u>Перечень вопросов к зачёту</u>

(сокращения: ФЛ – функция Лагранжа, УЛ – уравнения Лагранжа, ФГ – функция Гамильтона, УГ – уравнения Гамильтона)

1. Дать определение голономной связи, обобщенных координат и числа степеней свободы системы, сформулировать принцип виртуальных работ и написать УЛ системы при наличии идеальных голономных связей (без вывода).
2. Получить ФЛ и УЛ частицы в аксиально-симметричном потенциальном поле в цилиндрических координатах.
3. Получить ФЛ и УЛ частицы в центрально-симметричном потенциальном поле в сферических координатах.
4. Доказать формулу $\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial q_\alpha}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор одной из частиц системы, описываемой обобщенными координатами q_α.
5. Доказать формулу $\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор одной из частиц системы, описываемой обобщенными координатами q_α.
6. ФЛ частицы массы *m* имеет вид $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} + \frac{q}{c}(\vec{A}(\vec{r},t),\dot{\vec{r}})$, где $\vec{A}(\vec{r},t)$ - заданная функция. Получить УЛ по координатам *x, y* и *z*.
7. ФЛ системы не меняется при малом преобразовании обобщенных координат $q_\alpha \to q_\alpha + Q_\alpha(q)\varepsilon$, где $\varepsilon = const.$ Вывести отсюда закон сохранения.
8. ФЛ системы не зависит от времени явно. Вывести отсюда закон сохранения.
9. ФЛ системы с одной степенью свободы не зависит от времени явно. Построить квадратуру, определяющую закон её движения.
10. Дать определение задачи двух тел и свести её к одночастичной.
11. Найти в квадратурах закон движения частицы в независящем от времени центральном поле.

12. Вывести второй закон Кеплера для частицы в центральном поле.
13. Получить уравнение траектории финитного движения частицы в кулоновом поле притяжения.
14. Получить УГ из УЛ с помощью преобразования Лежандра.
15. Дать определение ФГ и построить ФГ заряда в произвольном электромагнитном поле.
16. Сформулировать принцип наименьшего действия и получить из него УГ для $\dot{q}_\alpha$.
17. Сформулировать принцип наименьшего действия и получить из него УГ для $\dot{p}_\alpha$.
18. Написать тождество Якоби для скобок Пуассона (без доказательства) и доказать теорему Пуассона.
19. Дать определение фазового пространства и доказать каноническую инвариантность фазового объема.
20. Дать определение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби и вывести алгоритм получения с его помощью закона движения системы.

Задачи к зачету

I. Формализм Лагранжа.

1. Найти число степеней свободы систем: материальная точка на сфере; две точки, связанные невесомым стержнем; тонкий массивный стер-жень; молекула H_2O (с учётом электронных степеней свободы и без).
2. Выразить кинетическую энергию материальной точки в цилиндрических и сферических координатах.
3. Построить функцию Лагранжа систем: двойной математический маятник; точка на сфере в поле тяжести; заряд в однородных электри-ческом и магнитном полях; заряд в поле электрического диполя.
4. Построить уравнения Лагранжа для систем из п.3.
5. Проинтегрировать уравнения Лагранжа для заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях.

II. Законы сохранения.

1. Определить возможные типы движения и найти закон движения точки в потенциале $U(x) = U_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax})$.
2. Найти законы сохранения для систем из п.I.3.
3. Качественно исследовать движение и проинтегрировать уравнения движения систем: точка на сфере в поле тяжести; точка в поле $U(r) = a/r^2$; заряд в магнитном поле бесконечного прямолинейного тока.
4. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния: в поле $U(r) = a/r^2$; на упругом эллипсоиде вращения. Найти сечение захвата частиц в поле $U(r) = a/r - b/r^2$;

III. Канонические методы.

1. Построить фукцию Гамильтона и уравнения Гамильтона для систем из пп. I.3., IV.4.

2. Найти закон движения системы, функция Гамильтона которой $H(p,q) = p^2 + q^2 + a(p^2 + q^2)^2$.

3. Найти каноническое преобразование, производящая функция которого $F(q,Q,t) = \frac{1}{2} m\omega(t) q^2 ctgQ$. Записать уравнения движения в переменных Q, P для гармонического осциллятора с частотой $\omega(t)$.

4. Проинтегрировать методом Гамильтона-Якоби движение систем: свободная частица; частица в однородном электрическом поле;

5. Найти дифференциальное сечение рассеяния на малые углы в поле $U(r,\theta) = \frac{a\cos^2\theta}{r^2}$ для частиц, налетающих параллельно прямой $\theta = 0$.

Основная литература

1. *Голдстейн Г. Классическая механика. - М.: Наука, 1975. – 416 с.*

2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М. Наука, 1988. – 216 с.*

Дополнительная литература

1. Казаков К.А. Введение в теоретическую и квантовую механику. – М.: Издательство МГУ, 2008. – 230с.