РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ в ЗАДАЧЕ о ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ РЕАКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Внимание! То, что здесь написано, необязательно знать на экзамене! Для экзамена достаточно уравнений (1),(2) и готового решения (8).

Решение прямой кинетической задачи в случае последовательной реакции первого порядка

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

приводит к двум дифференциальным уравнениям

$$\frac{d[A](t)}{dt} = -k_1[A](t) \tag{1}$$

$$\frac{d[B](t)}{dt} = -k_2[B](t) + k_1[A](t) \tag{2}$$

Решение уравнения (1) нам знакомо

$$[A](t) = [A]_0 e^{-k_1 t} \tag{3}$$

Уравнение (2) требует дополнительного обсуждения. Вот, один из возможных приемов нахождения функции $[B](t)$.
Сразу договоримся, что будем искать её в виде

$$[B](t) = Q(t) \times e^{-k_2 t} \tag{4}$$

Таким образом, для того чтобы найти $[B](t)$, нам нужно теперь получить в явном виде $Q(t)$. Подставим в уравнение (2) соотношения (3) и (4)

$$\begin{aligned} \frac{d[B](t)}{dt} &= -k_2 Q(t) e^{-k_2 t} + k_1 [A]_0 e^{-k_1 t} = \\ &= \frac{dQ(t) e^{-k_2 t}}{dt} = \frac{dQ(t)}{dt} e^{-k_2 t} - k_2 Q(t) e^{-k_2 t} \end{aligned} \tag{5}$$

После сокращений получаем

$$\frac{dQ(t)}{dt} e^{-k_2 t} = k_1 [A]_0 e^{-k_1 t}; \ \frac{dQ(t)}{dt} = k_1 [A]_0 e^{-(k_1 - k_2)t} \tag{6}$$

Интегрируем уравнение (6)

$$dQ(t) = k_1[A]_0 e^{-(k_1-k_2)t} dt$$

$$Q(t) - Q(t=0) = \int_0^t k_1[A]_0 e^{-(k_1-k_2)t} dt =$$

$$[A]_0 \frac{k_1}{k_2-k_1} e^{-(k_1-k_2)t} - [A]_0 \frac{k_1}{k_2-k_1} = \tag{7}$$

$$[A]_0 \frac{k_1}{k_2-k_1}\left(e^{-(k_1-k_2)t} - 1\right)$$

Теперь остается подставить (7) в (4) и получить зависимость концентрации промежуточного продукта В от времени

$$[B](t) = Q(t) \times e^{-k_2 t} = [A]_0 \frac{k_1}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) \tag{8}$$

Прием, который мы использовали для решения дифференциального уравнения (2) и получения соотношения (8) можно назвать способом Лагранжа. Этот способ применим для решения любого уравнения вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = F(t)y(t) + P(t) \tag{9}$$

где $F(t), P(t)$ - некоторые функции от переменной t. Мы видим, что (9) несколько сложнее (2). В (2) $[B](t)$ в правой части умножается на константу, а в уравнении (9) $y(t)$ умножен на функцию $F(t)$. Существенно, что правая часть уравнений (9) и (2) зависит от $y(t)$ (или $[B](t)$) линейно.

Последовательность шагов при решении (9) – такая же, как и при решении (2). Общее решение (9) имеет вид

$$y(t) = Q(t) \times e^{-\int F(t)dt} = \left(\int P(t) e^{\int F(t)dt} + C_1\right) e^{-\int F(t)dt}$$