МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

ФОРМУЛЫ СТОКСА И ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА., А.А. ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

УДК 517.3

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Скалярное поле определяется скалярной функцией точки $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u = u(M) = u(x,y,z).$$

Векторное поле определяется векторной функцией $\bar{F} = \bar{F}(M) = \bar{F}(\bar{r})$, где $\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$ – радиус-вектор точки M:

$$\bar{F} = P(x,y,z)\bar{\imath} + Q(x,y,z)\bar{\jmath} + R(x,y,z)\bar{k}$$

или

$$\bar{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big).$$

Градиент скалярного поля $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ в точке M – это вектор

$$\operatorname{grad} u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right).$$

Введем «формальный» вектор:

$$\bar{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ – ***оператор Гамильтона,***

тогда $\operatorname{grad} u = \bar{\nabla} u$ – «формальное» произведение вектора на скаляр.

Дивергенция (расходимость) векторного поля $\boldsymbol{\bar{F}(x,y,z) = (P,Q,R)}$ – это

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\bar{\nabla}, \bar{F}) -$$

скалярное произведение (!).

Ротор (вихрь) векторного поля $\boldsymbol{\bar{F}}$ – это вектор

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$$

или

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\bar{\nabla}, \bar{F}]$$ – векторное произведение.

Вычислить дивергенцию и ротор заданных векторных полей.

Задача 1. $\bar{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\bar{k} = \bar{0}.$$

Задача 2. $\bar{F}(x,y,z) = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$.

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(z^2 + x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = 0.$$

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + x^2)\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + z^2)\right)\bar{\jmath} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2 + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + z^2)\right)\bar{k} =$$

$$= (2y - 2z)\bar{\imath} - (2x - 2z)\bar{\jmath} + (2x - 2y)\bar{k} = 2(y - z, z - x, x - y).$$

Задача 3. $\bar{F}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$.

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) =$$
$$= 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz.$$

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2z & xyz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xyz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\right)\bar{\jmath} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)\right)\bar{k}=$$
$$=(xz^2-xy^2)\bar{\imath}-(yz^2-x^2y)\bar{\jmath}+(y^2z-x^2z)\bar{k}=$$
$$=(xz^2-xy^2,x^2y-yz^2,y^2z-x^2z).$$

Задача 4. $\bar{F}(x,y,z)=\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)$.

$\bar{F}(x,y,z)=\operatorname{grad}(x^2+y^2+z^2)=(2x,2y,2z)$

$\operatorname{div}\bar{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial(2x)}{\partial x}+\frac{\partial(2y)}{\partial y}+\frac{\partial(2z)}{\partial z}=2+2+2=6.$

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{\imath}&\bar{\jmath}&\bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{\imath}&\bar{\jmath}&\bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ x&y&z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial(2z)}{\partial y}-\frac{\partial(2y)}{\partial z}\right)\bar{\imath}-\left(\frac{\partial(2z)}{\partial x}-\frac{\partial(2x)}{\partial z}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial(2y)}{\partial x}-\frac{\partial(2x)}{\partial y}\right)\bar{k}=\bar{0}.$$

Задача 5. Доказать, что $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\bar{0}$.

Решим эту задачу двумя способами.

1-й способ.

$\operatorname{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, и тогда

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\begin{vmatrix}\bar{\imath}&\bar{\jmath}&\bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial x}&\frac{\partial u}{\partial y}&\frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2u}{\partial z\partial y}\right)\bar{\imath}-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\right)\bar{\jmath}+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\right)\bar{k}=\bar{0}.$$

2-й способ. Был введен оператор Гамильтона $\bar{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ и было замечено, что $\operatorname{grad}u=\bar{\nabla}u$, $\operatorname{rot}\bar{F}=[\bar{\nabla},\bar{F}]$.

Поэтому $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\operatorname{rot}(\bar{\nabla}u)=[\bar{\nabla},\bar{\nabla}u]=\bar{0}$ (так как векторы $\bar{\nabla}$ и $\bar{\nabla}u$ коллинеарны, то их векторное произведение равно $\bar{0}$).

Задача 6. Доказать, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{F}=0$.

Решим эту задачу двумя способами.

1-й способ.

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$ и тогда

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}=0.$$

2-й способ. Был введен оператор Гамильтона $\overline{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ и было замечено, что $\operatorname{div}\bar{F}=(\overline{\nabla},\bar{F})$, $\operatorname{rot}\bar{F}=[\overline{\nabla},\bar{F}]$.

Поэтому $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{F}=\operatorname{div}([\overline{\nabla},\bar{F}])=(\overline{\nabla},[\overline{\nabla},\bar{F}])=0$ (так как полученное смешанное произведение равно нулю (определитель!), поскольку среди трех векторов два являются коллинеарными).

Правда, 2-й способ лучше?!

ФОРМУЛА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

Поток вектора $\overline{\mathbf{F}}$ через поверхность $\boldsymbol{S}$ в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\bar{\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{\cos\alpha},\boldsymbol{\cos\beta},\boldsymbol{\cos\gamma})$ к поверхности $\boldsymbol{S}$ – это интеграл

$$\iint_S(\bar{F},\bar{n})dS=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds-$$

поверхностный интеграл 2-го рода.

Если S – замкнутая двусторонняя поверхность без самопересечений (простая), ограничивающая объем V, а $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S, то справедлива формула Гаусса – Остроградского:

$$\oiint_S(\bar{F},\bar{n})dS=\iiint_V\operatorname{div}\bar{F}\,dxdydz.$$

Задача 7. Вычислить поток векторного поля $\bar{F}=(3x-y,x-2y,2y+z)$ через замкнутую простую поверхность S, ограничивающую объем V, в сторону внешней нормали.

Поток $=\oiint_S(\bar{F},\bar{n})dS=\iiint_V\operatorname{div}\bar{F}\,dxdydz=\iiint_V(3-2+1)dxdydz=$
$=2\iiint_V dxdydz=2|V|.$

Задача 8. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (xz, 0{,}0)$ через замкнутую поверхность S, составленную из части поверхности $x^2 + y^2 = 1 - z$ (перевернутая и подвинутая вверх на 1 «чаша» $z = x^2 + y^2$) и части плоскости $z = 0$ $(z \geq 0)$, в направлении внешней нормали.

Найдем пересечение «чаши» с плоскостью $z = 0$, для чего решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, «чаша» пересекает плоскость $z = 0$ по окружности $x^2 + y^2 = 1$ и, значит, проецируется на круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в плоскости $z = 0$. Кроме того, у нас $z_{\text{н}} = 0$, $z_{\text{в}} = 1 - x^2 - y^2$.

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F}, \bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F}\, dxdydz = \iiint_V zdxdydz =$$
$$= \iint_\sigma dxdy \int_{z_{\text{н}}}^{z_{\text{в}}} zdz = \iint_\sigma dxdy \int_0^{1-x^2-y^2} zdz \boxed{\equiv}$$

перейдем в цилиндрические координаты

$$\boxed{\equiv} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{1-r^2} zdz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr(1 - r^2)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r - 2r^3 + r^5)dr = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Задача 9. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (y, -2x, z)$ через замкнутую поверхность S, составленную из части поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (конус) и части плоскости $z = h$ $(0 \leq z \leq h)$, в направлении внешней нормали.

Найдем пересечение конуса с плоскостью $z = h$, для чего решим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 \\ z = h \end{cases}.$$

Следовательно, конус пересекает плоскость $z = h$ по окружности $x^2 + y^2 = h^2$.

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F}, \bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F}\, dxdydz = \iiint_V (0 + 0 + 1)dxdydz =$$
$$= \iiint_V dxdydz = |V| = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Задача 10. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (xz, xy, yz)$ через замкнутую поверхность S, составленную из плоскостей $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, в направлении внешней нормали.

Поверхность S представляет собой прямоугольную пирамиду с вершинами в точках $(0{,}0{,}0), (1{,}0{,}0), (0{,}1{,}0), (0{,}0{,}1)$, которая проецируется на прямоугольный треугольник в плоскости Oxy. Применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F},\bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dxdydz = \iiint_V (z+x+y)dxdydz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (z+x+y)dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left((x+y)(1-(x+y)) + \frac{1}{2}(1-(x+y))^2\right) =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left((x+y) - (x+y)^2 + \frac{1}{2} - (x+y) + \frac{1}{2}(x+y)^2\right) dy =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+y)^2\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-(x+y)^2)\, d(x+y) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(\left((x+y) - \frac{1}{3}(x+y)^3\right)\Bigg|_0^{1-x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \left(\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3} - \frac{5}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}\,.$$

Задача 11. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (xz, xy, yz)$ через замкнутую поверхность S, составленную из части цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в 1-м октанте, и плоскостей $x = 0, y = 0, z = 0, z = H$ в направлении внешней нормали.

Поверхность S проецируется на четверть круга радиуса R, лежащую в 1-м квадранте плоскости Oxy. Применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F},\bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dxdydz = \iiint_V (z+x+y)dxdydz =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^H (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z)dz =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr \left(Hr\cos\varphi + Hr\sin\varphi + \frac{H^2}{2}\right) =$$
$$= H\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int_0^R r^2 dr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr \left(\frac{H^2}{2}\right) =$$
$$= H\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} + \frac{H^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^2}{2} = \frac{2HR^3}{3} + \frac{\pi H^2 R^2}{8}\,.$$

Задача 12. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (xz, x^2y, y^2z)$ через замкнутую поверхность S, составленную из части цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$ лежащих в 1-м октанте, и плоскостей $x = 0, y = 0, z = 0$, в направлении внешней нормали.

Поверхность S проецируется на четверть круга радиуса 1, лежащую в 1-м квадранте плоскости Oxy. Применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F}, \bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\, dxdydz = \iiint_V (z + x^2 + y^2)dxdydz =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 rdr \int_0^{r^2} (z + r^2)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 rdr \left(\frac{r^4}{2} + r^4\right) =$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{8}.$$

Задача 13. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (x^3, y^3, z^3)$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ в направлении внешней нормали.

Применим формулу Гаусса – Остроградского:

$$\text{Поток} = \oiint_S (\bar{F}, \bar{n})dS = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\, dxdydz = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz =$$
$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a (r^2) r^2 \cos\theta\, dr = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^a r^4 dr =$$
$$= 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

Задача 14. Вычислить поток векторного поля $\bar{F} = (xy, yz, xz)$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящейся в 1-м октанте, в направлении внешней нормали.

Заметим, что часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящаяся в 1-м октанте, не является замкнутой поверхностью. Замкнем поверхность, для чего добавим и вычтем интегралы по $S^+_{x=0}$, $S^+_{y=0}$, $S^+_{z=0}$ (это проекции части сферы на соответствующие координатные плоскости). Пусть S^+ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, находящаяся в 1-м октанте. Тогда

$$\text{Поток} = \iint_S (\bar{F}, \bar{n})dS =$$
$$= \left(\iint_S (\bar{F}, \bar{n})dS + \iint_{S_{x=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{x=0})dS + \iint_{S_{y=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{y=0})dS + \iint_{S_{z=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{z=0})dS\right) -$$
$$- \iint_{S_{x=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{x=0})dS - \iint_{S^+_{y=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{y=0})dS - \iint_{S_{z=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{z=0})dS =$$
$$= \oiint_{S_{\text{замкн}}} (\bar{F}, \bar{n})dS - \iint_{S_{x=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{x=0})dS - \iint_{S^+_{y=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{y=0})dS -$$
$$- \iint_{S_{z=0}} (\bar{F}, \bar{n}_{z=0})dS \boxed{=}$$

так как $\bar{F} = (xy, yz, xz)$, то $\operatorname{div}\bar{F} = y + z + x$, векторы внешних нормалей к частям координатных плоскостей

$\bar{n}_{x=0} = (-1,0,0)$, $\bar{n}_{y=0} = (0,-1,0)$, $\bar{n}_{z=0} = (0,0,-1)$,

объем V – часть шара радиуса 1, находящаяся в первом октанте, то

$$\boxed{=} \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\, dxdydz - \iint_{S_{x=0}} (-xy)dS - \iint_{S^+_{y=0}} (-yz)dS - \iint_{S_{z=0}} (-xz)dS =$$
$$= \iiint_V (x + y + z)dxdydz - 0 - 0 - 0 =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (r\cos\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi + r\sin\theta) r^2 \cos\theta\, dr =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta)\cos\theta\, d\theta \int_0^1 r^3 dr =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta)\cos\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi + \cos\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\sin\theta =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin 2\theta \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\right) + \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin^2\theta \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{8} + 0 + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}.$$

Векторное поле $\bar{F}$ называется ***потенциальным*** в области D, если существует скаляр $u = u(x, y, z)$ (***потенциал!***), такой, что $\operatorname{grad} u = \bar{F}$ в каждой точке области D. В односвязной области для потенциальности поля $\bar{F}$ достаточно, чтобы оно было безвихревым, то есть чтобы $\operatorname{rot} \bar{F} = \bar{0}$.

Векторное поле $\bar{F}$ называется ***соленоидальным*** в области D, если $\operatorname{div} \bar{F} = 0$ в каждой точке этой области. В случае соленоидальности векторного поля поток этого поля через любую замкнутую поверхность, лежащую в D, равен 0.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то оно ***гармонично***, а потенциал поля является ***гармонической функцией***.

Положим по определению

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, тогда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – ***оператор Лапласа.***

Если $\Delta u = 0$, то u называется ***гармонической функцией***.

Докажем, что $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u$.

Действительно,

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

При этом, $\operatorname{grad} u = \bar{\nabla} u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = (\bar{\nabla}, \bar{\nabla} u) = (\bar{\nabla}, \bar{\nabla}) u = (\bar{\nabla})^2 u = \Delta u$. То есть получаем, что $(\bar{\nabla})^2 = \Delta$ (квадрат оператора Гамильтона дает оператор Лапласа).

Поле $\bar{F}$ гармонично, если существует потенциал u, то есть $\bar{F} = \operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div} \bar{F} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0 = \Delta u$. Поэтому потенциал гармоничного поля является гармонической функцией.

Какие из следующих полей потенциальны в $\mathbb{R}^3$?

Задача 15. $\bar{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2)\right)\bar{k} =$$

$= (0,0,0) \equiv \bar{0} \Longrightarrow$ поле потенциально.

Задача 16. $\bar{F}(x, y, z) = (xz, zy, xy)$.

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & zy & xy \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(zy)\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right)\bar{\jmath} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(zy) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\bar{k} =$$

$= (x - y, x - y, 0 - 0) \not\equiv \bar{0} \Longrightarrow$ поле не потенциально.

Задача 17. $\bar{F}(x, y, z) = (ax + y + bz, 2x + cy + dz, bx + dy + cz)$.

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + y + bz & 2x + cy + dz & bx + dy + cz \end{vmatrix} =$$

$= (d - d)\bar{\imath} - (b - b)\bar{\jmath} + (2 - 1)\bar{k} = (0,0,1) \not\equiv \bar{0} \Longrightarrow$ поле не потенциально.

Задача 18. $\bar{F}(x, y, z) = (yz \cos xy, xz \cos xy, \sin xy)$.

$$\operatorname{rot}\bar F = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz\cos xy & xz\cos xy & \sin xy \end{vmatrix} =$$

$= (x\cos xy - x\cos xy)\bar\imath - (y\cos xy - y\cos xy)\bar\jmath +$
$+(z\cos xy - xzy\sin xy - z\cos xy + yzx\sin xy)\bar k = (0,0,0) \equiv \bar 0 \Longrightarrow$ поле потенциально.

Задача 19. Какие из следующих полей соленоидальны в $\mathbb{R}^3$?

1) $\bar F(x,y,z) = (1+2xy, -y^2z, z^2y - 2yz + 1)$.
   $\operatorname{div}\bar F = \frac{\partial}{\partial x}(1+2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2y - 2yz + 1) =$
   $= 2y - 2yz + 2yz - 2y \equiv 0 \Longrightarrow$ поле соленоидально.

2) $\bar F(x,y,z) = (x(z^2-y^2), y(x^2-z^2), z(x^2+y^2))$.
   $\operatorname{div}\bar F = \frac{\partial}{\partial x}\big(x(z^2-y^2)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(y(x^2-z^2)\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(z(x^2+y^2)\big) =$
   $= z^2 - y^2 + x^2 - z^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 \not\equiv 0 \Longrightarrow$ поле не соленоидально.
3) $\bar F(x,y,z) = (x^2yz, zy^2x, -xyz^2)$.
   $\operatorname{div}\bar F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^2x) + \frac{\partial}{\partial z}(-xyz^2) =$
   $= 2xyz + 2xyz - 2xyz = 2xyz \not\equiv 0 \Longrightarrow$ поле не соленоидально.
4) $\bar F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, xy\right)$ в $\mathbb{R}^3$ вне начала координат.
   $\operatorname{div}\bar F = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) =$
   $= -\frac{-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} + 0 \equiv 0 \Longrightarrow$ поле соленоидально.

Задача 20. Найдите ротор плоского векторного поля $\bar F = (P\{x,y), Q(x,y), 0)$.

$$\operatorname{rot}\bar F = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(0 - \frac{\partial}{\partial z}(Q(x,y))\right)\bar\imath - \left(0 - \frac{\partial}{\partial z}(P(x,y))\right)\bar\jmath + \left(\frac{\partial}{\partial x}(Q) - \frac{\partial}{\partial y}(P)\right)\bar k =$$
$$= \left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ничего не напоминает? (Часть формулы Грина…)

Задача 21. Докажите, что плоское векторное поле
$\bar F(x,y,z) = \frac{\bar r}{r^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right)$ гармонично всюду вне начала координат.

$$\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(0) =$$

$= \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} + 0 \equiv 0 \Longrightarrow$ поле соленоидально

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0{,}0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(0{,}0, \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2}\right) = \bar{0}$$

$\Longrightarrow$ поле потенциально

$\Longrightarrow$ поле гармонично.

ФОРМУЛА СТОКСА

Пусть L – замкнутый контур, S – поверхность «натянутая» на этот контур, $\bar{n}_+$ – единичный вектор нормали к поверхности S, согласованный с направлением обхода контура L, тогда

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L (\bar{F}, d\bar{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F}, \bar{n}_+)dS,$$

то есть ***циркуляция (работа) векторного поля $\bar{\mathbf{F}} = (\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R})$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через любую поверхность S, натянутую на контур L. При этом предполагается, что ориентация вектора $\bar{\boldsymbol{n}}_+$ к поверхности S согласована с направлением обхода контура L.***

Задача 22. Пусть $\bar{F} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$. Применить формулу Стокса к интегралу

$$\oint_L (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz = \oint_L (\bar{F}, d\bar{r}) =$$

$$= \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F}, \bar{n}_+)dS = 2\iint_S \big((y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma\big)dS,$$

здесь S – некоторая поверхность, натянутая на контур L, $\bar{n}_+$ – единичный вектор нормали к поверхности S, согласованный с направлением обхода контура L, $\bar{n}_+ = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, и

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & z^2 + x^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + x^2)\right)\bar{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + z^2)\right)\bar{\jmath} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2+x^2)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2+z^2)\right)\bar{k}=$$
$$=(2y-2z)\bar{\imath}-(2x-2z)\bar{\jmath}+(2x-2y)\bar{k}=2(y-z,z-x,x-y).$$

Задача 23. Пусть $\bar{F}=(y+z,x+z,x+y)$. Применить формулу Стокса к интегралу

$$\oint_L (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=\oint_L (\bar{F},d\bar{r})=$$
$$=\iint_S (\operatorname{rot}\bar{F},\bar{n}_+)dS=\iint_S (\bar{0},\bar{n}_+)dS=0,$$

здесь S – некоторая поверхность, натянутая на контур L, $\bar{n}_+$ – единичный вектор нормали к поверхности S, согласованный с направлением обхода контура L, и

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=(1-1,1-1,1-1)=\bar{0}.$$

Задача 24. С помощью формулы Стокса вычислить интеграл $\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz$, где L – окружность $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=0\end{cases}$, взяв в качестве поверхности S полусферу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Интегрирование в плоскости Oxy ведется против часовой стрелки.

В этом случае $\bar{F}=(x^2y^3,1,z)$,

$\bar{n}_+=\frac{1}{R}(x,y,z)$,

$dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$, S – верхняя полусфера, σ – ее проекция на плоскость Oxy,

$$\operatorname{rot}\bar{F}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y^3 & 1 & z\end{vmatrix}=(0-0,0-0,0-3x^2y^2).$$ Поэтому

$$\oint_L x^2y^3dx+dy+zdz=\iint_S (\operatorname{rot}\bar{F},\bar{n}_+)dS=$$
$$=\iint_S \left(0\cdot\frac{x}{R}+0\cdot\frac{y}{R}-3x^2y^2\cdot\frac{z}{R}\right)dS=-\frac{3}{R}\iint_S x^2y^2zdS=$$
$$=-\frac{3}{R}\iint_\sigma x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=-3\iint_\sigma x^2y^2dxdy=$$

$$= -3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr((r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2) =$$
$$= -3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^R r^5 dr = -3\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi \, d\varphi \cdot \frac{R^6}{6} =$$
$$= -\frac{3}{8}\cdot R^6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - \underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{\pi}{2}}\right)d\varphi = -\frac{3}{8}\cdot R^6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = -\frac{3\pi R^6}{8}.$$

Задача 25. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{F} = (z, x, y)$ по контуру L, полученному от пересечения плоскости $x + y + z = 2$ с координатными осями (против часовой стрелки).

Плоскость $x + y + z = 2$ пересекает координатные оси в точках $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ и $C(0,0,2)$. В качестве поверхности S возьмем треугольник ABC (стороны которого равны $2\sqrt{2}$).

$\bar{n}_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$,

$$\operatorname{rot}\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1-0, 1-0, 1-0).$$ Поэтому

$$\oint_L zdx + xdy + ydz = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F}, \bar{n}_+)dS = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S (1+1+1)dS =$$
$$= \sqrt{3}\cdot|S| = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$