МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЧАСТЬ 1

В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

УДК 512.6

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу линейной алгебры, читаемому студентам первого курса химического факультета МГУ.

Глава 1. Системы линейных уравнений. Матрицы. Определители

§1.Системы линейных уравнений. Задачи, где они возникают

Системы линейных уравнений представляют собой математические модели многих актуальных задач естественных и социальных наук.

При изучении математических объектов принято задавать себе вопросы: какие интересующие нас задачи описывают рассматриваемые модели? Какими свойствами обладают эти объекты? Каковы алгоритмы произведения расчётов по этим моделям?

Полезность систем линейных уравнений сомнений не вызывает. Например, решая в школе задачи про окислительные-восстановительные реакции, Вы уже сталкивались с подобными системами уравнений. Приведём ещё примеры задач, имеющих отношение к химии, математическая модель которых приводит к системе линейных уравнений.

<u>Пример 1. Расчет смесей</u>

Пусть требуется приготовить смесь из m веществ в количествах $b_j, j = 1, \dots, m$ каждого из этих веществ. Для приготовления смеси имеется n компонент, каждая из которых содержит a_{ij} i-ого вещества, (j −номер компонента). Обозначим x_i – искомое количество i-ого вещества.

Тогда сформулированная задача примет вид системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

<u>Пример 2. Определение состава смеси спектрофотометрическими измерениями</u>

Оптическая плотность раствора химического вещества определяется равенством

$$D = \log_{10}\left(\frac{I_0}{I}\right),$$

где I, I_0-интенсивности светового потока до и после прохождения через раствор. Оптическая плотность связана с концентрацией поглощающего вещества и толщиной слоя l формулой

$$D(\lambda) = \varepsilon(\lambda)cl,$$

где $\varepsilon(\lambda)$ —молекулярный коэффициент поглощения, являющийся индивидуальный характеристикой вещества, зависящей от λ -длины волны, c —концентрация. Если смесь состоит из n невзаимодействующих веществ, то её оптическая плотность равна сумме оптических плотностей, составляющих её веществ,

$$D(\lambda) = \varepsilon_1(\lambda)c_1 l + \cdots + \varepsilon_n(\lambda)c_n l.$$

Если произвести измерения при $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$, то получили систему линейных уравнений

$$\begin{cases} D(\lambda_1) = \varepsilon_1(\lambda_1)c_1 l + \cdots + \varepsilon_n(\lambda_1)c_n l \\ \dots \\ D(\lambda_n) = \varepsilon_1(\lambda_n)c_1 l + \cdots + \varepsilon_n(\lambda_n)c_n l \end{cases}$$

относительно концентраций $c_{1,\dots,}c_n$.

В главе будет доказано, что если определитель матрицы этой системы не равен 0, то система позволяет однозначно определить искомые величины $c_{1,\dots,}c_n$.

<u>Пример 3. Исследование состава смеси при помощи сенсоров</u>

Сенсорами называют приборы, выходной сигнал которых зависит от концентрации определенного вещества в газовой среде или в растворе, причем эти чувствительности известны и обозначаются a_{ij} (j —номер вещества, i —номер сенсора).

Предполагается, что сигналы, обусловленные присутствием в смеси каждого из веществ, складываются и что величина сигнала от определенного вещества пропорциональна концентрации, т.е. x_j для j —ого вещества, а коэффициентом пропорциональности является число a_{ij} (для i —ого сенсора).

Таким образом,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

В главе будет доказано, что при $m = n$ и при условии $|A| \neq 0$ эта система позволяет однозначно определить числа $x_1, \ldots, x_n$.

Нам предстоит развить интересную математическую теорию. Мы будем внимательно следить за переходом от поставленной задачи к последовательным этапам её решения, обсуждать предпринимаемые шаги, вводимые вспомогательные понятия и т.д. Этот процесс, делающий Вас «соучастником», очень полезен для повышения уровня математической культуры, необходимой для творческого применения Вами математических методов.

Изложение начнём … с цитаты из книги академика В.И.Арнольда « Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа», МЦНМО, 2005. :

Существует два основных способа ставить задачу: французский способ состоит в том, чтобы сформулировать вопрос наиболее общим образом, т.е. так, чтобы его нельзя было бы далее обобщить без потери смысла, в то время как русский способ состоит в том, чтобы сформулировать его в том простейшем случае, который нельзя далее упростить, не лишая вопрос его основного содержания.

Начнём использовать французский способ. Что можно обобщать? Во многих реальных задачах количество переменных — неизвестное a priori число, которое мы обозначим n. В общем случае будем рассматривать линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - b = 0$. А сколько следует рассматривать уравнений? Рассуждая «по — французски » — неизвестное заранее число, которое обозначим m. В итоге получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

В этой системе $x_1, \ldots, x_n$ — искомые величины, а числа $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ — заданные коэффициенты системы. Систему (1.1) общего вида мы и будем изучать в курсе линейной алгебры. В курсе аналитической геометрии числа m, n не больше 3. Это связано с тем, что точка с двумя координатами $(x_1; x_2)$ – это точка плоскости, а точка с тремя координатами$(x_1; x_2; x_3)$ —это точка пространства. Поэтому установленным свойствам решений системы можно дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Впрочем, в изложении курса линейной алгебры будут рассматриваться объекты, которые хотя и не имеют непосредственной геометрической трактовки (например, точки $(x_1; \dots; x_n)$ пространства n измерений), но представляют собой обобщения интуитивно ясных, наглядных понятий.

Возвратимся к системе (1.1). На первый взгляд, её легко решить, последовательно исключая неизвестные (это – метод Гаусса). Решена ли наша задача? Кажется, решена. Указан способ, в принципе позволяющий исследовать любую систему такого вида. Но – встанем на позицию критика. Записать, при произвольных размерах системы, условие разрешимости этой системы и дать формулу для её решений – совсем не просто. Поэтому давайте продолжим наши рассмотрения и постараемся понять, что же мы хотим получить?

Пришло время использовать русский подход (см. цитату выше) и максимально упростить систему (1.1), сведя её, при $m = n = 1$, к одному уравнению

$$ax = b. \tag{1.2}$$

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$, или

$$x = a^{-1}b. \tag{1.3}$$

Если же $a = 0$, но $b \neq 0$, то уравнение (1.2) принимает вид $0x = b$, а это уравнение не имеет решений. Если же $a = 0, b = 0$, то уравнение сводится к равенству $0x = 0$, верному при любом x.

Поставим перед собой задачу записать систему (1.1) в виде, похожем на уравнение (1.2), а также получить для решений системы формулу, подобную равенству (1.3).

§2. Матричная запись системы уравнений

2.1. Векторы-столбцы (и векторы-строки)

Начнём упрощать систему (1.1) произвольных размеров. Разные уравнения этой системы содержат одни и те же переменные $x_1, \dots, x_n$. Эти переменные можно рассматривать, как коэффициенты при новых объектах, которые мы будем называть векторами-столбцами и которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы ввели в рассмотрение новые объекты и должны описать их простейшие свойства. Прежде всего следует выяснить, когда объекты

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

равны между собой? Будем считать, что векторы-столбцы$\bar{a}$, $\boldsymbol{b}$ (0.4) ***равны между собой*** тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_i = b_i, i = 1, \dots, m$.

Определим ***сумму векторов –столбцов*** (1.4) естественным образом:

$$\bar{a} + \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \cdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} \quad . \qquad \bar{a} \quad (1.5)$$

Произведение числа α на вектор - столбец $\bar{a}$ определим равенством

$$\alpha\bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \cdots \\ \alpha a_m \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Используя определения (1.5) и (1.6), легко проверить равенства:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.
2. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a}$, где $\bar{0} -$ вектор столбец, состоящий из m нулей.
4. Для любого вектора-столбца $\bar{a}$ существует единственный вектор-столбец $-\bar{a}$ такой, что выполнено равенство $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.
5. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$.
6. $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$.
7. $1\bar{a} = \bar{a}$.
8. $0\bar{a} = \bar{0}$.
9. $\alpha\bar{0} = \bar{0}$.

С учётом определений и установленных равенств, преобразуем систему (1.1) к уравнению

$$x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{b} \ , \quad (1.7)$$

в котором

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \bar{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Определение. Выражение $x_1\bar{a}_1 + \cdots + x_n\bar{a}_n$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \dots, x_n$.

Замечание. Таким образом, задача о возможности представить вектор $\bar{b}$ в виде линейной комбинации (1.7) векторов $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ сводится к системе линейных уравнений (1.1).

Замечание. Точно так же, как векторы столбцы, можно рассматривать и ***векторы-строки***

$\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, с аналогичными определениями равенства векторов, суммы векторов, произведения числа на вектор и с теми же самыми свойствами этих операций.

2.2. Матрицы. Краткая запись системы уравнений

Уравнение (1.7) пока ещё совсем не похоже на уравнение (1.2). Для того, чтобы добиться полного сходства, следует заменить набор чисел $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ каким-то одним объектом. Так как сама система (1.1) изображена в виде таблицы, естественно рассмотреть таблицу, составленную из коэффициентов системы, расположенных так же, как они расположены в системе:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.9)$$

Эта таблица называется ***матрицей системы***. Эта матрица имеет m строк, строка с номером i представляет собой набор чисел $a_{i1}, \dots, a_{in}$, и n столбцов, перечисленных в (1.8). Будем говорить, что матрица ***A имеет размер*** $m \times n$.

Как и в предыдущем пункте, следует выяснить простейшие свойства новых объектов – матриц. Будем говорить, что матрица $\boldsymbol{A}$ размера $m \times n$ ***равна*** матрице $\boldsymbol{B}$ такого же размера

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.10)$$

тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$ выполнены равенства $a_{ij} = b_{ij}$. Отметим, что говорить о равенстве матриц, имеющих различные размеры, лишено смысла.

Определим ***сумму матриц*** (1.9) и (1.10) одинакового размера равенством

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.11)$$

и произведение числа α на матрицу (1.9) равенством

$$\alpha\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (1.12)$$

Используя равенства (1.11) и (1.12), легко установить, операции над матрицами обладают теми же свойствами, что и операции над векторами:

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.
2. $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$.
3. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{0}-$ нулевая матрица размера $m\times n$, т.е.α
   $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
4. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ (1.9) существует матрица $(-\boldsymbol{A})$, такая, что $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,
   $$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$
5. $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$.
6. $(\alpha\beta)\boldsymbol{A}=\alpha(\beta\boldsymbol{A})$.
7. $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.
8. $0\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.
9. $\alpha\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$.

Следует отметить, что в левой части равенства 8 символ 0 обозначает число ноль, а в правой его части, равно как и всюду в равенстве 9, символ $\boldsymbol{0}$ обозначает нулевую матрицу. Использование похожих символов 0 и $\boldsymbol{0}$ для обозначения разных объектов, как правило, не вызывает недоразумений. Там, где это будет необходимо, будет специально оговорено, какой символ, 0 или $\boldsymbol{0}$, используется.

Введённые операции пока не позволяют получить для системы (1.1) краткую запись, подобную (1.2).

Определим ***операцию умножения матрицы $\boldsymbol{A}$*** размера $m\times n$ ***на вектор-столбец $\boldsymbol{x}$*** с координатами $x_1,\dots,x_n$ равенством

$$\boldsymbol{A}\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \qquad (1.13)$$

Результатом этой операции является вектор – столбец с m координатами. Тогда, ввиду определения равенства векторов, система (1.1) равносильна равенству векторов- столбцов, имеющему вид

$$\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}. \qquad (1.14)$$

Уравнение (1.14) вполне похоже на уравнение (1.1).

Таким образом, часть поставленной задачи успешно решена.

2.3. Произведение матриц. Единичная матрица

Рассмотренную в предыдущем пункте операцию умножения матрицы на вектор легко обобщить и определить ***произведение матрицы размера*** $m \times n$ ***на матрицу размера*** $n \times l$. Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет вид (1.9), матрица $\boldsymbol{B}$ равна

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}.$$

Определим их произведение $\boldsymbol{AB}$, как матрицу $\boldsymbol{C}$ размера $m \times l$, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \ \ i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l. \qquad (1.15)$$

Это равенство означает, что столбец с номером j матрицы $\boldsymbol{AB}$ представляет собой произведение матрицы $\boldsymbol{A}$ на столбец с номером j матрицы $\boldsymbol{B}$.

Операция произведения матриц обладает свойствами:

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$, если $\boldsymbol{A}$ имеет размер $m \times l$, $\boldsymbol{B}$ имеет размер $l \times k$, $\boldsymbol{C}$ имеет размер $k \times n$.
2. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$, если $\boldsymbol{A}$ имеет размер $m \times l$, $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ имеют размер $l \times n$.

Равенство $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ в общем случае неверно. Например, если $\boldsymbol{A}$ имеет размер $m \times l$, $\boldsymbol{B}$ имеет размер $l \times k$ и $k \neq m$, то матрица $\boldsymbol{BA}$ просто не определена. Если же определены оба произведения $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BA}$ и выполнено равенство $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, то говорят, что матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *коммутируют.*

Напомним, что действительное число 1 обладает тем свойством, что для любого числаa справедливы равенства $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. По аналогии, следует определить ***единичную матрицу*** $\boldsymbol{E}$ как матрицу, для которой для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ выполнены равенства $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$. Однако, если $\boldsymbol{A}$ имеет размер $m \times l, l \neq m$, то эти равенства невозможны ни для какой матрицы $\boldsymbol{E}$. Действительно, если определена матрица $\boldsymbol{AE}$ и $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{A}$, то матрица $\boldsymbol{E}$ должна иметь размер $l \times l$, если определена матрица $\boldsymbol{EA}$ и $\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$ то матрица $\boldsymbol{E}$ должна иметь размер $m \times m$ и равенство $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$ невозможно. Таким образом, пусть мы рассматриваем далее ***квадратные матрицы*** размера $n \times n$.

Назовём ***единичной матрицей*** *размера* $n \times n$ матрицу

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Из равенства (1.15) сразу следует, что для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ вида (1.9) размера $n \times n$ выполнено требуемое равенство $\boldsymbol{AE} = \boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}$.

Напомним, что для действительного числа $a \neq 0$ существует число a^{-1} такое, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. По аналогии, определим для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ ***обратную матрицу*** $\boldsymbol{A^{-1}}$ условием $\boldsymbol{A^{-1}A} = \boldsymbol{AA^{-1}} = \boldsymbol{E}$. Вопрос, при каких условиях обратная матрица существует, будет подробно рассмотрен позже. Отметим лишь, забегая вперёд, что условию $a \neq 0$, необходимому и достаточному для существования числа a^{-1}, соответствует условие отличия от нуля определителя рассматриваемой матрицы. Что такое определитель матрицы, будет рассказано далее.

§3. Определитель матрицы

3.1.Определение определителя матрицы

Как правило, формальное определение определителя матрицы вызывает некоторое недоумение – откуда взялась такая конструкция? Мы попытаемся прийти к этому понятию «русским методом» (см. цитату выше). Для уравнения

$$ax = b,$$

при условии $a \neq 0$, получаем $x = \frac{b}{a}$, или

$$x = a^{-1}b.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_{12} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_{12} = b_2 \end{cases}. \ (1.17)$$

Умножим первое уравнение на число a_{22}, а второе уравнение на число a_{12}, получим следствие исходной системы

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + \quad a_{12}a_{22}x_{12} = b_1a_{22} \\ a_{12}a_{21}x_1 + \quad a_{12}a_{22}x_{12} = b_2a_{12} \end{cases}$$

и, вычитая из первого из этих уравнений второе, находим

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$. (1.18)

Если число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, то из (1.18) находим

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \ (1.19)$$

Подставляя найденное значение x_1 (1.19) в любое из уравнений (1.17), найдём x_2. Система (1.17) получит единственное решение. Обратите внимание на сходство условий $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ для уравнения (1.18) и условия $a \neq 0$ для уравнения (1.2). Величину $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назовём

определителем матрицы системы (1.17). Действительно, она определяет, будет ли решение системы существовать и будет ли оно единственным.

Определитель матрицы третьего порядка

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

представляет собой число

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1.20)$$

Если у Вас хватит терпения, то Вы можете убедиться в том, что если решать систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 & +a_{32x_2} & +a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

аналогично решению системы (1.17), последовательно исключая неизвестные, то коэффициент при последнем оставшемся неизвестном как раз будет равен $|\boldsymbol{A}|$.

Для описания законов образования формул (1.18) и (1.19) и дальнейшего обобщения сделаем такое наблюдение. В формуле (1.18) есть два слагаемых, одно со знаком плюс, другое со знаком минус. При этом каждое слагаемое является произведением чисел вида $a_{1i}a_{2j,}$ где одно из чисел i, j равно 1, а другое равно 2. Это означает, что в произведении $a_{1i}a_{2j,}$ участвуют элементы любой строки и любого столбца(как первые номера, так и вторые принимают оба значения 1 и 2). Если мы посмотрим на равенство , то заметим, что каждое из 6 произведений, стоящих в правой части (), содержит элементы каждой строки и каждого столбца. При этом в каждом таком произведении первые индексы сомножителей – это числа 1,2,3, а вторые числа – это те же самые цифры, но в некотором другом порядке. Это наводит на мысль определить понятие ***перестановки*** чисел $1, 2, \dots, n$. Перестановка представляет собой те же числа, но взятые в некотором другом порядке (возможно, и в том же самом). Очевидно, что существует $n!$ различных перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. (Действительно, на первое можно подставить любое из n чисел, т.е. имеем n возможностей. При выбранном первом числе, на второе место можно выбрать одно из $n-1$ оставшихся чисел, т.е. имеем $n(n-1)$ возможностей выбора первых двух чисел. Продолжим эти рассуждения, получаем $n(n-1) \dots . \times 2 \times 1$ возможных перестановок, что и утверждалось).

<u>Определение</u>. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ какая-то перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Назовем пару чисел (a_i, a_j) ***инверсией***, если $a_i > a_j$, но $i < j$.

<u>Определение</u>. ***Перестановку*** назовем ***четной***, если число инверсий в ней четное, и ***нечетной*** в противном случае.

Например, 1,3,2,4,6,5 – четная перестановка (инверсии (3,2) и (6,5)), 1,4,5,2,6,3 – нечетная (инверсии (4,2), (5,2) и (6,3)).

Каждую перестановку $a_1, \ldots, a_n$ можно рассматривать, как отображение σ множества чисел $1, 2, \ldots, n$ на множество чисел $1, 2, \ldots, n$, определенное равенством:

$$\sigma(i) = a_i \qquad (1.21)$$

Отображение (1.21) удобно задавать матрицей $2 \times n$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(\mathrm{n}) \end{pmatrix}$$

Считаем по определению величину $(-1)^{\text{четность } \sigma}$ числом 1, если σ – четная подстановка, и числом -1, если σ – нечетная подстановка.

Выражение (1.18) есть сумма двух слагаемых.

Эти слагаемые – произведения чисел вида a_{ij}, $i, j = 1,2$.

Рассмотрим первое слагаемое $-a_{11}a_{22}$. У него вторые индексы сомножителей совпадают с первыми. Если расположить первые индексы в первой строке матрицы, а вторые ее индексы – во второй строке, то получим матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствующую перестановке, оставляющей все числа на своих местах, и эта перестановка четная (нет инверсий).

Второму слагаемому $a_{12}a_{21}$сопоставим матрицу перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (1.22)$$

(еще раз напомним, что в первой строке стоят первые индексы сомножителей, во второй строке – вторые)

Перестановка (1.22) – нечетная (в ней 1 инверсия). Таким образом, величина (1.18) представляет собой сумму слагаемых вида

$$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)},$$

взятую по всевозможным перестановкам чисел 1,2 (этих перестановок ровно две). Аналогично, выражение (1.20) есть сумма слагаемых вида

$$(-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} a_{3,\sigma(3)}$$

Например, слагаемому $a_{13}a_{21}a_{32}$

соответствует перестановка: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Это – четная перестановка (2 инверсии: (3,1) и (3,2))

Слагаемому $-a_{12}a_{21}a_{33}$ соответствует перестановка$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Это – нечетная перестановка (1 инверсия: (2,1))

Проверка остальных слагаемых труда не составит и Вы сделаете ее самостоятельно в качестве полезного упражнения.

Сделанные наблюдения позволяют нам дать общее

Определение. ***Определитель матрицы*** размера $(n \times n)$ равен

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\text{четность } \sigma} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}, \tag{1.23}$$

где суммирование в правой части (1.23) произведено по всем перестановкам чисел $1, \dots, n$ (так что правая часть содержит $n!$ слагаемых).

3.2.Свойства определителя матрицы

Определение. Если

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то ***транспонированной матрицей*** $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ называется матрица

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Можно сказать, что транспонирование квадратной матрицы состоит в замене ее строк столбцами (и, разумеется, наоборот). Можно сказать также, что транспонированная матрица получается из исходной симметрией относительно главной диагонали.

Свойство 1.

$$|\boldsymbol{A}|=\left|\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\right|. \qquad (1.24)$$

►Член определителя матрицы $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$, соответствующий члену $a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$ определителя $|\boldsymbol{A}|$, имеет вид $a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}$ имеет ту же чётность перестановки.◄

Замечание: Равенство (1.24) позволяет нам утверждать, что все свойства определителя, доказанные для его строк, окажутся верными и для его столбцов и наоборот. Поэтому в дальнейшем свойства формулируются для строк.

Свойство 2.

Если определитель имеет строку, состоящую из нулей, то он равен 0.

►По формуле (1.23), все члены определителя равны 0.◄

Свойство 3.

Если один определитель получается из другого перестановкой двух строк, то он равен исходному определителю, взятому с противоположным знаком.

►При упомянутом выше действии происходит смена знака у всех слагаемых в правой части равенства (1.23), значит, сменит знак и весь определитель.◄

Свойство 4.

Если определитель содержит две одинаковые строки, то он равен 0.

►Действительно, при перестановке одинаковых строк определитель, с одной стороны, не изменится, так как строки одинаковые. С другой стороны, он сменит знак по свойству 3. Таким образом, $|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{A}|$, откуда$|\boldsymbol{A}| = 0$. ◄

Свойство 5.

При умножении всех элементов одной и той же строки на число $\alpha \in \mathbb{R}$ определитель матрицы умножится на число α.

►Все слагаемые в правой части равенства (1.23) будут иметь общий множитель α.◄

Свойство 6.

Определитель с двумя пропорциональными строками равен 0.

►Сразу следует из свойств 4 и 6.◄

Свойство 7.

Если элементы i-ой строки определителя представлены в виде

$a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}, j = 1, \dots, n,$ то

$$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{i1} \dots a_{in} \\ a_{1n} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a'_{i1} \dots a'_{in} \\ a_{1n} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a''_{i1} \dots a''_{in} \\ a_{1n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

►Член определителя (1.23) принимает вид

$$a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = a'_{1\sigma(1)} \dots a'_{i\sigma(i)} \dots a'_{n\sigma(n)} + a''_{1\sigma(1)} \dots a''_{i\sigma(i)} \dots a''_{n\sigma(n)}$$

и доказываемое равенство справедливо ввиду равенства (1.23), примененного ко всем определителям, содержащимся в доказываемом равенстве.

<u>Свойство 8.</u>

Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен 0.

Замечание: Позже мы установим, что это утверждение представляет собой необходимое и достаточное условие равенства определителя нулю.

►Если, например, i −строка есть линейная комбинация остальных строк, то по свойству 7 исходный определитель равен сумме определителей, имеющих пропорциональные строки, и он равен нулю по свойству 6. ◄

<u>Свойство 9.</u>

Определитель не меняется, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.
►Применим свойство 7 и 8.◄

§4.Теорема Лапласа. Обратная матрица. Правило Крамера

4.1.Теорема Лапласа

Сопоставим элементу a_{ij} квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ определитель матрицы полученной из матрицы $\boldsymbol{A}$ вычеркиванием всей строки с номером i и всего столбца с номером j.

Определение. Полученный определитель $(n-1)$-го порядка назовем ***минором*** M_{ij}. Величину $(-1)^{i+j}M_{ij}$ назовем ***алгебраическим дополнением*** элемента a_{ij} и обозначим A_{ij}.
Имеет место важная теорема Лапласа о разложении определителя по строке.

Теорема 1 (Лапласа).

Для любого $i, i = 1, \dots, n$ *выполняется равенство:*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.25}$$

Замечание: Разумеется, верна и теорема о разложении определителя по столбцу, утверждающая, что для любого $j, j = 1, \dots, n$ *выполняется равенство:*

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{1.26}$$

Доказательство.

►Для упрощения выкладок докажем эту теорему для $n = 3$. Рассмотрим определитель $|\boldsymbol{A}|$ и произведём группировку его членов

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\,. \tag{1.27}$$

Сделаем решающее наблюдение. Имеют место равенства

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

Определители, стоящие в правых частях равенств (1.28), получаются из исходного определителя удалением, соответственно, элементов первой строки и первого столбца, элементов первой строки и второго столбца, элементов первой строки и третьего столбца. Таким образом, это – миноры исходной матрицы. Равенство (1.27) и (1.28) означают, что

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \quad (1.29)$$

Вспоминая определение алгебраического дополнения, перепишем это равенство в виде

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \quad (1.30)$$

Точно так же можно получить формулы:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \quad (1.31)$$

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \quad (1.32)$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \quad (1.33)$$

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}. \quad (1.34)$$

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \quad (1.35)$$

В общем случае ограничимся схемой доказательства. В равенстве (1.23) можно сгруппировать все слагаемые, содержащие a_{ij} при фиксированных i, j. Остается заметить, что коэффициентом при a_{ij} будет сумма слагаемых, представляющих собой как раз определитель A_{ij}. Зафиксировав i и рассматривая все $j = 1, \dots n$ мы представим правую часть равенства (1.23) как раз в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} .$$

Т.е. равенство (1.25) (а вместе с ним и (1.26)−(1.35)) установлены. ◄

Эта теорема имеет важное дополнение.

Теорема 2

Если $i \neq k$, *то*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \quad (1.36)$$

Аналогично, если $j \neq l$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{il} = 0 \qquad (1.37)$$

► Выражение, стоящее в левой части доказываемого равенства, представляет собой разложение по строке с номером k определителя, полученного из исходного определителя заменой k −той строки на строку с номером i. Этот определитель содержит две одинаковые строки, поэтому он равен 0. ◄

4.2. Обратная матрица

Сначала сформулируем важное свойство определителей:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|. \qquad (1.38)$$

Доказательство этого свойства для матриц размера 2×2 и 3×3 − прекрасное упражнение для самостоятельной работы. Оно состоит в непосредственной проверке равенства (1.38), используя определение произведения матриц и свойства определителей.

Для матриц произвольного размера оно доказано в учебниках по линейной алгебре (например, в учебнике А.Г. Курош, Курс высшей алгебры, любое из многочисленных переизданий). Доказательство носит технический характер, поэтому здесь мы его не приводим.

Напомним, что матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ является обратной для матрицы $\boldsymbol{A}$, если выполнены равенства

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}. \qquad (1.39)$$

Из равенств (1.39) следует, что обратную матрицу может иметь только квадратная матрица. Более того, не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу. Вопрос о существовании обратной матрицы и служит темой этого пункта. Отметим, что из равенств (1.38), (1.39) и очевидного равенства $|\boldsymbol{E}| = 1$ следует, что

$$1 = |\boldsymbol{E}| = \left|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right| = |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right|. \qquad (1.40)$$

Из (1.40) следует, что $|\boldsymbol{A}| \neq 0, \left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{A}|}$. Таким образом, условие $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ является необходимым условием существования обратной матрицы. Следующая теорема означает, что это условие является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы.

Теорема 3. *Если $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{A}$ имеет обратную матрицу. При этом*

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.41)$$

где A_{ij}обозначают алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы $\boldsymbol{A}$.

►Для простоты выкладок рассмотрим случай матрицы размера 3× 3. Докажем, что матрица

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \qquad (1.42).$$

где A_{ij} − алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, является обратной матрицей для матрицы $\boldsymbol{A}$. Для этого умножим матрицу (1.42) на матрицу $\boldsymbol{A}$:

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} & a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} & a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} \\ a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} & a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} & a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} \\ a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} & a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} & a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

и используем равенства (1.30)-(1.32), (1.36), согласно которым матрица, стоящая в правой части равенства равна

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. Проверка равенства

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

проводится вполне аналогично, с использованием равенств (1.33) – (1.35) и (1.37).

Таким образом, равенства (1.39) выполнены для матрицы (1.42) и, таким образом, эта матрица является обратной для матрицы $\boldsymbol{A}$. ◄

4.3. Правила Крамера

Вернёмся к решению системы $\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}$ в случае, когда $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. При этом, согласно теореме 3, существует обратная для матрицы $\boldsymbol{A}$ матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$. Умножим обе части равенства $\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}$ слева на матрицу $\boldsymbol{A^{-1}}$ и получим $\boldsymbol{A^{-1}A}\bar{x} = \boldsymbol{A^{-1}}\bar{b}$, или $\boldsymbol{E}\bar{x} = \boldsymbol{A^{-1}}\bar{b}$, или

$$\bar{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\bar{b}. \qquad (1.43)$$

Рассмотрим произведение

$$\boldsymbol{A}^{-1}\bar{b} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + & A_{21}b_2 + & A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 & +A_{22}b_2 + & A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 & +A_{23}b_2 + & A_{33}b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Заметим, что справедливы равенства

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенства (1.43),(1.44) дают

$$x_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы и называют ***правилами Крамера*** решения системы линейных уравнений.

Аналогичная теорема справедлива и для решения системы n уравнений с n неизвестными $\boldsymbol{A}\bar{x} = \bar{b}$ в случае, когда $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. Координата решения x_i получается делением определителя, полученного из определителя исходной системы заменой в нём столбца с номером i столбцом свободных членов, на определитель исходной системы. Иными словами,

$$x_i = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots b_1 & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots b_n & \dots a_{nn} \end{vmatrix}, i = 1, \dots, n. \qquad (1.45)$$