МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ

ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

А.И.КОЗКО, Л.М.ЛУЖИНА, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этой методической разработке приведены примеры вычисления пределов последовательностей и пределов функций. Продолжение этой темы – в разработке «Формула Тейлора. Правила Лопиталя»

Предел последовательности. Предел функции. Первый и второй замечательные пределы.

Определение 1. Если каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставлено число $a_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана ***последовательность*** $\{a_n\}$. Иными словами, последовательность представляет собой отображение множества натуральных чисел во множество действительных чисел.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ имеет ***предел, равный числу A*** тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

Удобно записывать это определение с помощью логических символов: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \ \forall\, n > N(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела последовательности используется символ: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Примеры. 1) Если $a_n = A$ для всех n, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $N(\varepsilon)$, и любого n $|a_n - A| = |A - A| = 0 < \varepsilon$.

2) Если $a_n = \frac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда если $n > N(\varepsilon)$, то $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $\frac{1}{n} < \varepsilon$, поэтому $|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Замечание. Не следует отождествлять понятие предела последовательности и предельной точки множества значений, принимаемых последовательностью. В первом из приведённых выше примеров последовательность имеет предел, но множество её значений состоит из одной точки и не имеет предельных точек. Во втором примере предельная точка множества значений – точка 0 – совпадает с пределом последовательности. Может оказаться и так, что предельная точка множества значений не является пределом последовательности (а является так называемым частичным пределом последовательности). Определение частичного предела и соответствующий пример будут приведены ниже.

Перейдём к определению понятия предела функции. Пусть $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{W}(a)$ точки a. (Отметьте, что функция $f(x)$ может быть не определена в самой точке a).

Определение 3. Говорят, что функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ ***предел, равный числу A***, когда для любой окрестности $V(A)$ точки A существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$точки a ($\dot{U}(a) \subset \dot{W}(a)$) такая, что выполняется включение $f(\dot{U}(a)) \subset V(A)$, что равносильно тому, что для любого $x \in \dot{U}(a)$ выполняется

$f(x) \in V(A)$. С помощью логических символов это определение записывается так:

$$\forall\, V(A)\ \exists\, \dot{U}(a)\colon\ \forall x \in \dot{U}(a)\ \ f(x) \in V(A).$$

Данное определение называется ***определением предела функции по Коши***.

Для обозначения этого предела используется символ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Теорема 1. ***Если предел последовательности $\{a_n\}$ существует, то он единствен, то есть, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1$ и если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_2$, то $A_1 = A_2$.***

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует, то он единствен, то есть, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2$, то $A_1 = A_2$.

Определение 4. Последовательность $\{\alpha_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется ***бесконечно малой,*** если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Аналогично, функция $\alpha(x)$ – ***бесконечно малая*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Теорема 2. ***Предел последовательности $\{a_n\}$ существует и равен числу A тогда и только тогда, когда a_n можно представить в виде $a_n = A + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.***

Аналогично, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Определение 5. Функция $\beta(x)$ называется ***ограниченной*** при $x \to a$, если она ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(a)$, то есть если существует такое число С, что для всех x из окрестности $\dot{U}(a)$ выполнено неравенство $|\beta(x)| < C$. В виде логических формул это выглядит так: $\exists\, C\ \forall x \in\ \dot{U}(a)\quad |\beta(x)| < C$.

Теорема 3. ***(Свойства бесконечно малых)***

1. ***Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$, то алгебраическая сумма – $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ тоже бесконечно малая при $x \to a$.***
2. ***Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая и $\beta(x)$ – ограниченная при $x \to a$, то произведение $\alpha(x)\beta(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.***
3. ***Если $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – бесконечно малые при $x \to a$, то произведение $\alpha_1(x)\alpha_2(x)$ – тоже бесконечно малая при $x \to a$.***

Бесконечно малые последовательности обладают вполне аналогичными свойствами:

1. ***Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то алгебраическая сумма – $\{\alpha_n\} \pm \{\beta_n\}$ тоже бесконечно малая последовательность.***
2. ***Если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, а $\{\gamma_n\}$ – ограниченная последовательность (то есть $\exists c$: $\forall n\ |\gamma_n| < c$), то $\{\alpha_n \cdot \gamma_n\}$ – бесконечно малая последовательность.***
3. ***Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то произведение $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая последовательность.***

Лемма. ***Если $\beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, то она ограничена при $x \to a$.*** (Обратное утверждение неверно!).

Теорема 4. ***(Арифметические свойства предела). Пусть две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют при $x \to a$, соответственно, пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $A_2 \neq 0$, то и частного этих функций равны, соответственно, сумме, разности, произведению и частному значений этих пределов, то есть $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$, $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x)) = A_1 - A_2$, а также $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2$. Если же $A_2 \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$.***

Аналогичная теорема верна и для последовательностей. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, а если $B \neq 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Определение 6. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < x - a < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении х к а справа*** и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$. Использовав логические символы, получим $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$: $\forall x$, $\quad 0 < x - a < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $-\delta < x - a < 0$ выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении х к а слева*** и обозначают это так: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$. Использовав логические символы, получим $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: \forall x, -\delta < x - a < 0 \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

Теорема 5. ***Функция $f(x)$ имеет при $x \to a$ предел, равный А, тогда и только тогда, когда она имеет пределы при стремлении х к а справа и слева, причем оба эти предела равны А.***

Замечание. Разумеется, для пределов справа и слева верны все теоремы об арифметических свойствах предела .

Определение 7. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к плюс-бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

С использованием логических символов это записывается так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\; \exists N(\varepsilon)\; \forall x > N(\varepsilon)\; |f(x) - A| < \varepsilon$.

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M(\varepsilon)$ такое, что для всех $x < M(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к минус-бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

С использованием логических символов это записывается так:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \;\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\exists\; M(\varepsilon)\; \forall x < M(\varepsilon)\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Наконец, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $x,\; x > N(\varepsilon)$ удовлетворяющих неравенству $|x| > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то говорят, что существует предел функции $f(x)$ ***при стремлении x к бесконечности*** и обозначают это так $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

С использованием логических символов это записывается так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\exists\; N(\varepsilon)\; \forall x\colon\; |x| > N(\varepsilon)\;\; |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Замечание. Разумеется, для пределов при стремлении к бесконечности, перечисленных в определении 3.7, верны все теоремы об арифметических свойствах предела.

Определение 8. Последовательность (b_n) называется ***бесконечно большой последовательностью,*** если для любого числа $M > 0$ существует такое число N, что $|b_n| > M$ при всех $n > N$. Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} b_n = \infty$.

Теорема 6. ***Если $(\boldsymbol{b_n})$ – бесконечно большая последовательность, то последовательность $\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{b_n}}\right)$ – бесконечно малая. Если $(\boldsymbol{\alpha_n})$ – бесконечно малая последовательность и $\boldsymbol{\alpha_n \neq 0,\; n \in N}$, то последовательность $\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha_n}}\right)$ – бесконечно большая.***

Определение 9. Если члены последовательности $\{b_n\}$ становятся положительными, начиная с некоторого номера, b для любого числа $M > 0$ существует такое натуральное число N, что $b_n > M$ при всех $n > N$, то используется запись $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и говорят, что *последовательность* $\{b_n\}$ *стремится к* $+\infty$.

Если члены последовательности $\{b_n\}$ становятся отрицательными, начиная с некоторого номера, то говорят, что *последовательность* $\{b_n\}$

стремится к $-\infty$, что обозначают символом $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$. Поэтому запись $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ означает, что для любого числа $M \in R$ можно указать такое натуральное число N, что $b_n < M$ для всех $n > N$.

Ещё раз отметим, что записи $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ носят символический характер и используются только для обозначения бесконечно большой последовательности, положительной бесконечно большой последовательности и отрицательной бесконечно большой последовательности, а каждая из этих типов последовательностей не имеет предела; то есть не является сходящейся последовательностью.

Числовую последовательность называют расходящейся, если она не сходится (не имеет предела). Бесконечно большие последовательности составляют часть расходящихся последовательностей. Расходящейся последовательностью будет любая неограниченная последовательность, поскольку всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Определение 10. По аналогии с тем, как было определено понятие бесконечно большой последовательности, можно определить понятие бесконечного предела функции. Говорят, что функция f *имеет при* $x \to a$ *предел, равный* $+\infty$, если a – предельная точка области определения функции f и если для всякого числа $K > 0$ существует $\delta = \delta\ (K) > 0$ такое, что для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $f(x) > K$.

Например, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, так как для любого $K > 0$ при x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}$, имеем $\frac{1}{x^2} > K$.

Говорят, что предел $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$, если a – предельная точка области определения функции f и для любого $\widetilde{K} < 0$ существует $\delta = \delta\left(\widetilde{K}\right) > 0$ такое, что если $0 < |x - a| < \delta$, то $f(x) < \widetilde{K}$.

Наконец, $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, если a – предельная точка области определения функции f и для любого $K > 0$ существует $\delta = \delta\ (K) > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$ имеем $|f(x)| > K$.

К примеру, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{|x|}=-\infty$, так как для любого $\widetilde{K}<0$ при $0<|x|<\frac{1}{|\widetilde{K}|}$ выполняется $\frac{-1}{|x|}<-\left|\widetilde{K}\right|=\widetilde{K}$.

Другой пример: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$, так как для любого $K>0$ при $0<|x|<\frac{1}{K}$ имеем $\left|\frac{1}{x}\right|>K$.

Точно так же можно определить бесконечные пределы при $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$. Подчеркнем, что функция, имеющая бесконечный предел, не имеет предела в обычном смысле точно так же, как это было для бесконечно большой последовательности.

Теорема 7. ***Если*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=+\infty}$, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty}$, ***то:*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+f_2(x)=+\infty}$***; для любого числа*** $\boldsymbol{c>0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \mathrm{c}f(x)=+\infty}$***, для любого числа*** $\boldsymbol{c<0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \mathrm{c}f(x)=-\infty}$***, при*** $\boldsymbol{c=0}$ $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} 0\cdot f(x)=0}$***;*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot f_2(x)=+\infty}$***.***

Замечание. При условиях теоремы ничего определенного о пределах $\lim\limits_{x\to a}\big(f_1(x)-f_2(x)\big)$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ сказать нельзя. Они представляют собой так называемые неопределённости типа $[\infty-\infty]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, которые требуют дополнительного исследования.

В качестве первого примера рассмотрим функции $f_1(x)=2x, f_2(x)=x$. Обе они стремятся к $+\infty$ при $x\to+\infty$. При этом $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f_1(x)-f_2(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Другой пример: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x$. В этом случае $f_1(x)-f_2(x)=-x$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f_1(x)-f_2(x)\big)=-\infty$.

Пусть теперь $f_1(x)=f_2(x)=x$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f_1(x)-f_2(x)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$.

Это были примеры неопределённости вида $(\infty-\infty)$. Рассмотрим примеры неопределённостей вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Пусть, например, $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x$. Очевидно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Если же $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+5}{2n^2+10}$. Решение: сразу применить теорему о пределе частного не удастся, так как здесь имеем неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому сначала разделим числитель и знаменатель на n^2 и получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{10}{n^2}}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, по теореме 2.4 также равны 0 пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$, поэтому, снова по теореме 2.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{10}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Пример 2. Пусть $P(n)=a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+a_{k-2}n^{k-2}\ldots+a_0$, $a_k\neq 0$, $Q(n)=b_mn^m+b_{m-1}n^{m-1}+\cdots+b_0$, $b_m\neq 0$ – многочлены. Тогда, если $k<m$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=0$, если $k=m$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_k}{b_m}$, а если $k>m$, то $\frac{P(n)}{Q(n)}$ – бесконечно большая последовательность. Доказательство. Если $k=m$, то $\frac{P(n)}{n^k}=a_k+a_{k-1}n^{-1}+\cdots+a_0n^{-k}$ и $\frac{Q(n)}{n^k}=b_m+b_{m-1}n^{-1}+\cdots+b_0n^{-k}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^k}=a_k$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{n^m}=b_m$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{P(n)}{n^k}}{\frac{Q(n)}{n^m}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_k}{b_m}=\frac{a_k}{b_m}$. Если $k<m$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^k}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{n^k}=b_m$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{P(n)}{n^k}}{\frac{Q(n)}{n^m}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0}{b_m}=0$. Если $k>m$, то рассмотрим последовательность $\frac{Q(n)}{P(n)}$. Как в предыдущем случае, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(n)}{P(n)}=0$, что, по теореме 2.6 означает, что $\frac{P(n)}{Q(n)}$ – бесконечно большая последовательность.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$. Решение. Легко видеть, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $|\sin x|\leq 1$, поэтому $\frac{\sin x}{x}$ представляет собой произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину и, следовательно, по теореме 2.3, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

Предел последовательности

Задача 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-(n^3-3n^2+3n-1)}{n^2+2n+1+n^2-2n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{2n^2+2}=$ $=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=3$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

Определение. Пусть n – натуральное число. Тогда $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)n$. $0!=1$. Заметим, что $n!=(n-1)!\cdot n=(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n$ и т.д.

Задача 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!-n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Задача 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)+(n+1)!}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)+1}{(n+2)(n+3)}=$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6}\quad=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$

Задача 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=$
заметим, что в числителе и знаменателе стоят суммы $n+1$ члена геометрической прогрессии, которые, как известно, равны
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ при $|q|<1$.

Задача 5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=$
заметим, что в числителе первой дроби стоит сумма n членов арифметической прогрессии, которая, как известно, равна
$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n-(n^2+2n)}{2(n+2)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=-\frac{1}{2}$.

Задача 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$
заметим, что в этом случае неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ обеспечивают слагаемые 2^n в числителе и знаменателе дроби, поэтому поделим их на 2^n, получим
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^{-n}}{1+2^{-n}}=1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=0$.

Задача 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}=\frac{0}{1}=0$, так как при $n\to\infty$ дробь $\frac{1}{n}$ стремится к нулю, а поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$.

Задача 8. $\operatorname{Lim}\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)=[\infty-\infty]=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}\right)\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)}{\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3-(2n+1)}{\left(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+1}}=0,$
так как знаменатель дроби, очевидно, стремится к ∞.

Предел функции

При вычислении пределов функций мы будем пользоваться следующими фактами, которые были доказаны на лекциях.

$\lim\limits_{x\to a}P_n(x)=P(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$ и др. Кроме того, не забываем, что пока $f(x)$ стоит под знаком предела, $x\in\dot{U}(a)$, то есть $x\neq a$.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\frac{1-1-6}{1+3+2}=-1.$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}=\left[\frac{4+2-6}{4-6+2}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x-1)}=\frac{2+3}{2-1}=5.$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{1-2+1}{1-1}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}= \quad =$
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=\frac{1-1}{1\cdot(1+1)}=0.$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right)=$
$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-3-x(x-2)}{x(x-2)^2(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-3}{x(x-2)^2(x-3)}=\left[\frac{-4+6-3}{0}\right]=\infty.$

Задача 5. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$
$=\lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.$ Заметьте, что мы посчитали производную функции $f(x)=x^3$.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. В таких задачах, как правило, предполагается, что нужно посчитать два отдельных предела. Иногда часть преобразований можно сделать сразу для обоих случаев.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty-(-\infty)]=+\infty$
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[+\infty-(+\infty)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} \quad =$
$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{1}{(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{1}{4}.$

Задача 8. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=[+\infty-(+\infty)]=$
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-1-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$. Далее будем отдельно рассматривать два случая:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{5}{-(1+1)}=-\frac{5}{2}$.

Задача 9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

Одна из глобальных идей в математике – замена переменной. Обозначим $t=\sqrt[6]{x+1}$. Тогда при $x\to 0$ получим $t\to 1$ и
$=\lim\limits_{t\to 1}\frac{t^3-1}{t^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to 1}\frac{(t^2+t+1)}{(t+1)}=\frac{3}{2}$.

Теорема. (первый замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Определение. В случае, когда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, говорят, что эти функции ***эквивалентны*** при $x\to a$ и обозначают это так: $f(x)\sim g(x)$. При этом предполагаем, что в некоторой проколотой окрестности точки a определены как дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$, так и дробь $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Отметим, что определение эквивалентности функций задаёт на множестве функций, определённых в некоторой проколотой окрестности точки a отношение эквивалентности. Действительно, из определения эквивалентности функций сразу следует, что: $f(x)\sim f(x)$ и если $f(x)\sim g(x)$, то и $g(x)\sim f(x)$. Из теоремы о пределе произведения получаем: если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$. В самом деле, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=1$ и. следовательно $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)}=1$. Таким образом, мы установили рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения эквивалентности функций.

Разумеется, определение эквивалентности функций сохраняется и для односторонних пределов и для пределов при стремлении к бесконечности.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ означает, что $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

В следующих задачах параметры α,β и другие, как правило, не равны нулю.

Примеры вычисления пределов

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 2}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Решение. $\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\frac{\sin x}{x\cos x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, по теореме о пределе частного $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$. Таким образом, мы установили, что $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}$. Обычное решение, вполне правильное:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{3x\operatorname{tg}5x}{5x\sin 3x}\right)=\frac{5}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot 1\cdot 1=\frac{5}{3}$.

Замечание. Обратим Ваше внимание на одну тонкость. Мы вычисляли, например, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}5x}{5x}$. При этом мы рассуждали так: обозначим $t=5x$. Тогда наш предел примет вид $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}$ и мы заметим, что при $x\to 0$ также и $t\to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=1$. При этом мы неявно использовали теорему о пределе сложной функции, гласящую:

Теорема. ***Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Пусть $g(y)$ определена в проколотой окрестности точки b и $\lim\limits_{y\to b}g(y)=c$.***

Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $\lim\limits_{y\to b}g(y)=g(b)$

2. Существует такая $\dot{U}(a)$, что $\forall x\in\dot{U}(a)$, $f(x)\neq b$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))$ и этот предел равен c.

Вывод. Если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=0$.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\sin\beta x}\cdot\frac{\alpha x}{\beta x}\right)=1\cdot 1\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Задача 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x\sin 5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)=$
$=1\cdot 1\cdot\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}$.

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

сделаем замену переменной: $x-\pi=t$, тогда

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(t+\pi)}{\sin 4(t+\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t+5\pi)}{\sin(4t+4\pi)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5t+\pi)}{\sin(4t)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-\sin 5t}{\sin 4t}\right)=-\frac{5}{4}.$$

Мы воспользовались периодичностью функции $\sin x$ и формулами приведения.

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=$

сделаем замену переменной: $x-\frac{\pi}{6}=t$, тогда получим

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-(\cos t\cos\frac{\pi}{6}-\sin t\sin\frac{\pi}{6})}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin t\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos t)+\frac{1}{2}\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^2+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}=2.$$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)=$

сделаем замену переменной: $x-1=t$, тогда получим

$$\lim_{t\to 0}\left(t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\lim_{t\to 0}\left(t\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}\cdot\cos\frac{\pi t}{2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

Использование тригонометрических формул часто позволяет обойти замену переменной и сделать решение более коротким.

Задача 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x)^2-(\sin x)^2}=$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задача 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{(\alpha-\beta)x}{2}\sin\frac{(\alpha+\beta)x}{2}}{x\cdot x}=2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}=$

$$=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}.$$

Задача 8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^3}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)((\cos x)^2+\cos x+1)}{x\sin 2x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2((\cos x)^2+\cos x+1)}{x\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin 2x}\cdot((\cos x)^2+\cos x+1)\right)=$
$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2}\cdot 3=\frac{3}{4}$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}$. Решение. Воспользуемся приведённой выше теоремой о пределе сложной функции, положив $t=arcsinx.$ Из школьного курса известно, что это – возрастающая функция, поэтому при $x\neq 0$ имеем также $t\neq 0$. По определению арксинуса, $x=\sin t$. По вышеупомянутой теореме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1$. Таким образом, $arcsinx\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}$. Решение. Воспользуемся приведённой выше теоремой о пределе сложной функции, положив $t=arctgx.$ Из школьного курса известно, что это – возрастающая функция, поэтому при $x\neq 0$ имеем также $t\neq 0$.(Свойства элементарных функций будут рассмотрены ниже, в главе). По определению арктангенса, $x=\mathrm{tg}t$. По вышеупомянутой теореме $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\mathrm{tg}\, t}=1$. Таким образом, $arctgx\sim x$ при $x\to 0$.

Приведённые примеры показывают, что $\sin x\sim tgx\sim arcsinx\sim arctgx\sim x$ при $x\to 0$.

Пример 6. Известно, что $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim z(x)$ при $x\to a$. Верно ли, что $f(x)h(x)\sim g(x)z(x)$ и что $f(x)\pm h(x)\sim g(x)\pm z(x)$ при $x\to a$?

Ответ. Первое из этих утверждений верное, а второе – нет. В самом деле, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1, \lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{z(x)}=1$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{h(x)}{z(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)}{z(x)}=1$.

Для того, чтобы опровергнуть второе утверждение, следует привести контрпример. Пусть $f(x)=x, h(x)=x-x^3, g(x)=x, z(x)=x-x^2$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{z(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x^3}{x-x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}=1$, но
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-h(x)}{g(x)-z(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot tg12x\cdot arctg2x}{60x^3}$. Решение. По предыдущему примеру, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin5x\cdot tg12x\cdot arctg2x}{60x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\cdot 12x\cdot 2x}{60x^3}=2$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}ctgx}{arctg\frac{1}{x^2}}$. Решение. Сделаем замену переменной $t=\frac{1}{x}$. $t\to +0$ при $x\to +\infty$, причём $t\neq 0$. Следовательно, применима теорема о пределе сложной функции и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}ctgx}{arctg\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t\cdot tgt}{arctgt^2}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{t^2}{t^2}=1$. Отметим, что мы использовали равенство $ctg\left(\frac{1}{t}\right)=tgt$.

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)}$, где a – какое-то число или $+\infty$, $-\infty$. Возможны следующие ситуации

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to a}h(x)=B,\ A,B\in\mathbb{R}$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)}=A^B$.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\in\mathbb{R},A\neq1,\ B=\pm\infty$. Задача решается легко.

Но когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A=1,\ B=\pm\infty$ возникает неопределенность $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{h(x)}=[1^\infty]$. С ней помогает справиться следующая теорема.

Теорема. ***Имеет место равенство*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$.

Замечание. Это равенство носит название второго замечательного предела. С его помощью будут вычислены производные показательной, логарифмической и степенной функции. Отметим, что как и в случае первого замечательного предела, применение для доказательства этой теоремы правила Лопиталя или формулы Тейлора приведёт к порочному логическому кругу.

Внимание! Далее следует пример ошибочного рассуждения:

поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, применим теорему о пределе произведения и получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$ (!)

Ошибка в этом рассуждении состоит в том, что теорему о пределе произведения можно применять в случае, когда число сомножителей в этом произведении ограничено, а не растёт с ростом n.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Решение. Положим $t=\frac{1}{x}$. При $x\to+\infty$ имеем: $t\to+0,\ t\neq0$, поэтому применима теорема о пределе сложной функции, согласно которой $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$. Решение. Положим $t=3x$. Если $x\to 0$, то $t\to 0, t\neq 0$. Тогда по теореме о пределе сложной функции получаем $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{6}{t}}$ и по теореме о пределе произведения получаем $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{6}{t}}=\left(\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^6=e^6$.

Вывод. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$.

Задача 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\right]=0.$

Задача 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1}{x+1}-1\right)^{x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x-1-x-1}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}.$

Заметим, что так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{x+1}=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}=e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=-2.$

Поэтому получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}\cdot x}=e^{-2}.$

Задача 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+3}\right)^{x^2+3x-2}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-1}{x^2+3}-1\right)^{x^2+3x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^2-1-x^2-3}{x^2+3}\right)^{x^2+3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{x^2+3x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-4}}\right)^{\frac{-4}{x^2+1}\cdot(x^2+3x-2)}=e^{-4}$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-4}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{-4}}=e$

и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4(x^2+3x-2)}{x^2+1}=-4.$

Задача 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x-3}=[1^\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}-1\right)^{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-2x+1-(x^2-4x+2)}{x^2-4x+2}\right)^{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1)}{x^2-4x+2}\right)^{x-3}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\cdot(x-3)}=e^2,$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-1}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2-4x+2}{2x-1}}=e$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)(x-3)}{x^2-4x+2}=2.$

Задача 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2x+1}{x+2}\right) =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln 2.$

Задача 6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1+x}{1-x}-1\right)^{\frac{1}{2x}} =$

$= \ln\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \ln e^1 = 1.$