МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ МГУ

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

А.И. КОЗКО, Л.М. ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 1-ГО И 2-ГО РОДА

Криволинейные интегралы 1-го рода

Пусть кривая L задана уравнениями: $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, в которых функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t) \in$ D$([\alpha,\beta])$, то есть непрерывно дифференцируемы на $[\alpha,\beta]$.

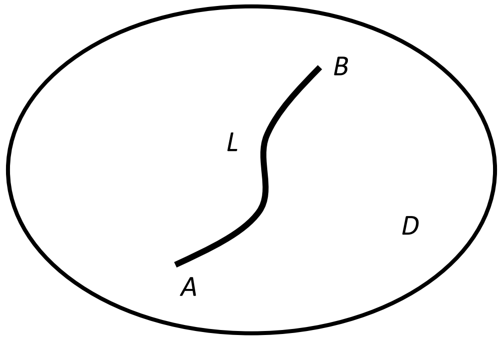

Рис. 1.

Точки $A = \big(x\,(\alpha),\ y\,(\alpha),\ z\,(\alpha)\big)$ и $B = \big(x\,(\beta),\ y\,(\beta),\ z\,(\beta)\big)$ – соответственно, начало и конец кривой L. Кроме того, пусть задана функция $f(x,y,z)$, непрерывная в области D в $\mathbb{R}^3$, содержащей кривую L.

Определение 1. ***Криволинейным интегралом первого рода*** от функции $f(x,y,z)$ по кривой L назовем определенный интеграл:

$$\int_L f(x,y,z)\,dl := \int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}dt.$$

Это определение не зависит от выбора параметра t. Действительно, если кривая L задана в другой параметризации: $t = t(u)$, $u \in [a,b]$, $t'(u) > 0$, $\forall u \in [a,b]$, то, сделав замену $t = t(u)$ в определенном интеграле, получим равенство:

$$\int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2+\big(z'(t)\big)^2}dt =$$

$$= \int_a^b f\Big(x\big(t(u)\big),y\big(t(u)\big),z\big(t(u)\big)\Big)\cdot\sqrt{\big(x_t'\big)^2+\big(y_t'\big)^2+\big(z_t'\big)^2}\cdot t'(u)\,du =$$

$$= \int_a^b f\Big(x\big(t(u)\big),y\big(t(u)\big),z\big(t(u)\big)\Big)\cdot\sqrt{\big(x_t'\cdot t_u'\big)^2+\big(y_t'\cdot t_u'\big)^2+\big(z_t'\cdot t_u'\big)^2}du =$$

$$\int_a^b f\Big(x\big(t(u)\big),y\big(t(u)\big),z\big(t(u)\big)\Big)\cdot\sqrt{(x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2}du.$$

Рассмотрим векторы $\bar{r}(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)$ и $\bar{r}'(t) = \big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$, $t \in [\alpha,\beta]$. Тогда криволинейный интеграл первого рода принимает вид: $\int_L f dl = \int_\alpha^\beta f\cdot|\bar{r}'(t)|\,dt$.

Если кривая L лежит в плоскости OXY, то $z(t) = 0$, и криволинейный интеграл принимает вид:

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t)\big)\cdot\sqrt{\big(x'(t)\big)^2+\big(y'(t)\big)^2}\,dt.$$

Отметим следующие свойства криволинейного интеграла 1-го рода:

1) Если $f(x,y,z) \equiv 1$, то интеграл $\int_L dl = |L|$, где $|L|$ – длина кривой L.
2) Непрерывную кривую L, состоящую из конечного числа $L_1, \ldots, L_n$ гладких кривых, называют кусочно-гладкой, и в этом случае имеет место равенство $\int_L f dl = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f dl$.
3) Если существуют интегралы 1-го рода от функций $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ по кусочно-гладкой кривой L и $\lambda, \mu \in R$ – произвольные действительные числа, то справедливо равенство:
$\int_L (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)\, dl = \lambda \cdot \int_L f dl + \mu \cdot \int_L g dl.$
4) Простейший физический смысл: если $f(x,y,z) \geq 0$ задает плотность кривой L, то криволинейный интеграл 1-го рода задает массу этой кривой.

Свойства 2) и 3) суть следствия определения криволинейного интеграла 1-го рода и свойств аддитивности и линейности определенного интеграла.

Задача 1. Вычислить $\int_L \frac{dl}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками $A(0,-2)$ и $B(4,0)$.

В этом случае выберем параметризацию
$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}, \ x \in [0,4].$

$y(x) = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}$, поэтому

$$\int_L \frac{dl}{x-y} = \int_0^4 \frac{1}{x - \left(\frac{1}{2}x - 2\right)} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x + 2} \sqrt{\frac{5}{4}}\, dx = \sqrt{5} \int_0^4 \frac{dx}{x+4} =$$
$$= \sqrt{5} \int_0^4 \frac{d(x+4)}{x+4} = \sqrt{5}\left(\left(\ln|x+4|\right)\Big|_0^4\right) = \sqrt{5}(\ln 8 - \ln 4) = \sqrt{5} \ln 2.$$

Задача 2. Вычислить $\int_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная параболой $x^2 = 2py$ $(p > 0)$.

Найдем точки пресечения парабол:
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ x^2 = 2py \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ y^4 = 8p^3 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = 0 \vee y = 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2p \\ y = 2p \end{cases}.$$
Так как на отсекаемом участке параболы $y \geq 0$ (нарисуйте «картинку»!), то $y = \sqrt{2px} \Rightarrow y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$ и

$$\int_L y dl = \int_0^{2p} \sqrt{2px} \sqrt{1 + \left(\frac{p}{\sqrt{2px}}\right)^2}\, dx = \int_0^{2p} \sqrt{2px + p^2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \sqrt{2px + p^2}\, d(2px + p^2) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{2}{3} (2px + p^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2p} = \frac{1}{3p}\left(\left(\sqrt{5}p\right)^3 - p^3\right) =$$
$$= \frac{p^2(5\sqrt{5} - 1)}{3}.$$

Задача 3. Вычислить $\int_L (x^2+y^2)^n dl$, где L – окружность радиуса с центром в начале координат.

Параметрическое уравнение такой окружности имеет вид:
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $t \in [0,2\pi]$. Тогда $\begin{cases} x_t' = -a\sin t \\ y_t' = a\cos t \end{cases}$ и

$$\int_L (x^2+y^2)^n dl = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)^n \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} a^{2n} a dt = a^{2n+1}\cdot 2\pi = 2\pi a^{2n+1}.$$

Задача 4. Вычислить $\int_L xydl$, где L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в 1-м квадранте.

Напомним, что параметрическое задание всего эллипса имеет вид:
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0,2\pi]$.

Часть эллипса, лежащая в 1-м квадранте, получается при $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда
$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t' = -a\sin t \\ y_t' = b\cos t \end{cases}$, $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и интеграл будет равен

$$\int_L xydl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, b\sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\cos t\, dt =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\, d\sin t =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\sin^2 t}\, d\sin t = \|\sin t = z\| =$$
$$= ab\int_0^1 z\sqrt{a^2+(b^2-a^2)z^2}dz =$$
$$= \frac{ab}{2(b^2-a^2)}\int_0^1 \sqrt{a^2+(b^2-a^2)z^2}d(a^2+(b^2-a^2)z^2) =$$
$$= \frac{ab}{2(b^2-a^2)}\cdot\frac{2}{3}\left((a^2+(b^2-a^2)z^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right) = \frac{ab}{3(b^2-a^2)}\left((a^2+b^2-a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}\right) =$$
$$= \frac{ab}{3(b^2-a^2)}(b^3-a^3) = \frac{ab(b^2+ab+a^2)}{3(b+a)}.$$

Задача 5. Вычислить $\int_L \sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды
$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$, $t \in [0,2\pi]$.

Тогда $\begin{cases} x_t' = a(1-\cos t) \\ y_t' = a\sin t \end{cases}$ и интеграл будет равен

$$\int_L \sqrt{2y}dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2(\sin t)^2}dt =$$
$$= \sqrt{2}a\sqrt{a}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t} =$$
$$= \sqrt{2}a\sqrt{a}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a\sqrt{a}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt =$$
$$= 2a\sqrt{a}\cdot 2\pi = 4\pi a\sqrt{a}.$$

Задача 6. Вычислить $\int_L (x-y)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=ax,\ a>0$.

Не путайте на плоскости параметрическое задание кривой и уравнение кривой в полярных координатах!

Как известно, уравнение $x^2+y^2=ax$ задает окружность радиуса $\frac{a}{2}$ с центром в точке $O\left(\frac{a}{2},0\right)$. Параметрическое уравнение этой окружности выглядит так:

$$\begin{cases} x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t=-\frac{a}{2}\sin t \\ y'_t=\frac{a}{2}\cos t \end{cases},\ t\in[0,2\pi].$$

Поэтому

$$\int_L (x-y)dl = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t-\frac{a}{2}\sin t\right)\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{a}{2}\cos t\right)^2}\,dt =$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\sin t)dt=\frac{a^2}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Задача 7. Вычислить $\int_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, где L – первый виток винтовой линии

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t,\ t\in[0,2\pi]. \\ z=at \end{cases}$$

В этом случае

$$\begin{cases} x'_t=-a\sin t \\ y'_t=a\cos t \\ z'_t=a \end{cases}$$ и поэтому интеграл будет равен

$$\int_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+a^2}dt = a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}t^2dt =$$

$$=\frac{a\sqrt{2}}{3}(2\pi)^3=\frac{8\sqrt{2}\pi^3 a}{3}.$$

Задача 8. Вычислить $\int_L xyzdl$, где L – четверть окружности

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=\frac{R^2}{4} \end{cases},$$ лежащая в первом октанте.

Найдем нужную нам окружность, которая является линией пересечения сферы и цилиндра:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x^2+y^2=\frac{R^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ \frac{R^2}{4}+z^2=R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{R}{2}\cos t \\ y=\frac{R}{2}\sin t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t=-\frac{R}{2}\sin t \\ y'_t=\frac{R}{2}\cos t \\ z'_t=0 \end{cases}.$$

$$\int_L xyzdl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{2}\cos t \frac{R}{2}\sin t \frac{\sqrt{3}}{2} R\sqrt{\left(-\frac{R}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\cos t\right)^2 + 0}dt =$$
$$= \frac{\sqrt{3}R^4}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d\sin t = \frac{\sqrt{3}R^4}{16}\left(\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}R^4}{32}.$$

Задача 9. Вычислить $\int_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, где L – первый виток конической винтовой линии
$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t, \ t \in [0{,}2\pi]. \\ z = t \end{cases}$$

Почему конической? Точка принадлежит какой-то поверхности, если ее координаты удовлетворяют уравнению этой поверхности: подставив в уравнение конуса $x^2 + y^2 = z^2$ выражения для x, y, z, получим, что
$(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 \equiv t^2$.
Далее, так как
$$\begin{cases} x_t' = \cos t - t\sin t \\ y_t' = \sin t + t\cos t \\ z_t' = 1 \end{cases}$$
, то получаем, что интеграл будет равен
$$\int_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)dl =$$
$$= \int_0^{2\pi}(2t - t)\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} =$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{\cos^2 t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{t^2+2}\, d(t^2+2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left((t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left((2\pi^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right).$$

Задача 10. Вычислить массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0{,}2\pi]$, если плотность в каждой точке равна квадрату радиус-вектора этой точки.
$$m = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)dl =$$
$$= \int_0^{2\pi}((a\cos t)^2 + (a\sin t)^2 + (bt)^2)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\left(a^2 t + \frac{b^2t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right).$$

Криволинейные интегралы 2-го рода

Пусть задан вектор $\bar{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ или кратко $\bar{F}(\bar{r}) = \big(P(\bar{r}), Q(\bar{r}), R(\bar{r})\big)$, где $\bar{r} = (x,y,z)$.

Предположим, что функции $P(\bar{r})$, $Q(\bar{r})$ и $R(\bar{r})$ непрерывны в области D, содержащей гладкую кривую L, которая задается уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, или кратко: $\bar{r} = \bar{r}(t)$, t меняется от α до β. Функции $x(t)$,

$y(t)$, $z(t)$ и их производные непрерывны при t, изменяющемся от α до β. Точки $A = \big(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)\big)$ и $B = \big(x(\beta), y(\beta), z(\beta)\big)$ есть, соответственно, начало и конец кривой L.

Определение 2. ***Криволинейным интегралом второго рода*** от вектора $\bar{F}(\bar{r})$ вдоль кривой L_+ с началом в точке A и окончанием в точке B называется интеграл

$$\int_{L_+} \bar{F} d\bar{r} = \int_{L+} Pdx + Qdy + Rdz := \int_\alpha^\beta \Big(P\big(\bar{r}(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(\bar{r}(t)\big) \cdot y'(t) + R\big(\bar{r}(t)\big) \cdot z'(t)\Big)\, dt.$$

Криволинейные интегралы 2-го рода также не зависят от выбора параметризации.

Кроме того,

если $L_+||Ox$, то $\int_{L+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L+} Pdx$,

если $L_+||Oy$, то $\int_{L+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L+} Pdy$,

если $L_+||Oz$, то $\int_{L+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L+} Pdz$.

Механический смысл криволинейного интеграла второго рода состоит в том, что им вычисляется работа силы $\bar{F}(\bar{r})$ по перемещению материальной точки вдоль пути L_+.

Рассмотрим $\int_{L_-} \bar{F} d\bar{r}$ – криволинейный интеграл вдоль кривой L с началом в точке B и окончанием в точке A. Тогда, по определению 2,

$$\int_{L_-} \bar{F} d\bar{r} = \int_\beta^\alpha \big(P\big(\bar{r}(t)\big) \cdot x'_t + Q\big(\bar{r}(t)\big) \cdot y'_t + R\big(\bar{r}(t)\big) \cdot z'_t\big)\, dt = -\int_{L_+} \bar{F} d\bar{r},$$

то есть при изменении направления пути интегрирования вдоль кривой L на противоположное криволинейный интеграл второго рода изменит знак.

Формула Грина

Начнем с определения интеграла второго рода по замкнутому контуру. *Плоским контуром* называется любая лежащая в плоской области D замкнутая кусочно-гладкая кривая L без самопересечений; контур L ограничивает область M в D. *Положительным направлением* обхода контура считается то направление, при котором область M остается слева. Контур L с выбранным на нем положительным направлением обозначается L_+ (см. рис. 2 и рис. 3). Направление обхода, противоположное положительному, называется отрицательным.

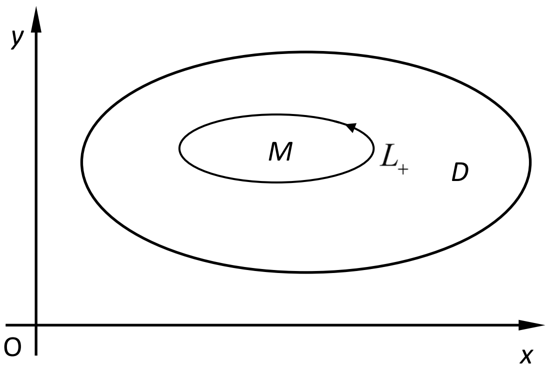

Рис. 2.

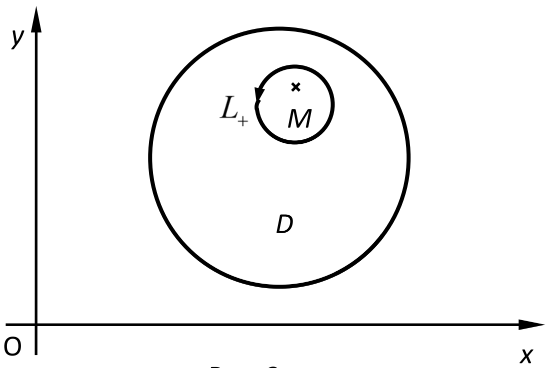

Рис. 3.

Выберем на L произвольные различные точки A и B. Тогда L_+ состоит из кривой Γ_1^+, соединяющей точки A и B, и кривой Γ_2^-, соединяющей точки B и A (см. рис. 4).

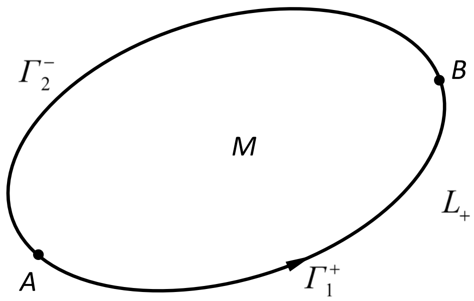

Рис. 4.

Полагаем по определению, что

$$\oint_{L_+} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma_1^+} Pdx + Qdy + \int_{\Gamma_2^-} Pdx + Qdy$$

(символ $\oint_{L_+}$ означает интегрирование по замкнутой кривой L_+ в указанном выше положительном направлении).
Отметим без доказательства, что это определение не зависит от выбора точек A и B.

Плоскую область D называют *односвязной*, если вместе с любым замкнутым контуром L, лежащим в D, ограничиваемая контуром L область M (далее называемая внутренность L), также целиком содержится в D. Область D на рисунке 1) – односвязная, на рис. 2) – не односвязная (в неё не входит точка, отмеченная крестиком).

Теорема (формула Грина). Если функции P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области D из $\mathbb{R}^2$, L_+ – контур в D, ограничивающий область M, то $\oint_{L_+} Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$

Задача 11. Вычислить $\int_{L_-} y^2dx + x^2dy$, где L_- – верхняя половина эллипса, пробегаемая по часовой стрелке.

В этом случае движение по часовой стрелке – это движение в «отрицательном» направлении, поэтому мы сразу ввели обозначение L_-. При этом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t' = -a\sin t \\ y_t' = b\cos t \end{cases}$, причем t меняется от π до 0 (!). Поэтому

$$\int_{L_-} y^2dx + x^2dy = \int_\pi^0 \left((b\sin t)^2(-a\sin t) + (a\cos t)^2(b\cos t)\right)dt =$$
$$= -ab^2\int_\pi^0 \sin^3 t\,dt + a^2b\int_\pi^0 \cos^3 t\,dt =$$
$$= ab^2\int_\pi^0 \sin^2 t\,d\cos t + a^2b\int_\pi^0 \cos^2 t\,d\sin t =$$
$$= ab^2\int_\pi^0 (1-\cos^2 t)d\cos t + a^2b\int_\pi^0 (1-\sin^2 t)d\sin t =$$
$$= ab^2\left(\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0\right) + a^2b\left(\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_\pi^0\right) =$$
$$= ab^2\left(\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) + 0 = \frac{4}{3}ab^2.$$

Задача 12. Вычислить $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ вдоль различных линий.

1) Вдоль прямой $y = x$:
   тогда $dy = dx$ и интеграл будет равен
   $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot x + x^2\cdot 1)dx = \int_0^1 3x^2dx = \left(x^3\big|_0^1\right) = 1.$
2) Вдоль $y = x^2$:
   тогда $dy = 2xdx$ и интеграл будет равен
   $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 (2x\cdot x^2 + x^2\cdot 2x)dx = \int_0^1 4x^3dx =$
   $= \left(x^4\big|_0^1\right) = 1.$
3) Вдоль $y = \sqrt{x}$:
   тогда $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ и интеграл будет равен
   $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int_0^1 \left(2x\cdot\sqrt{x} + x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = \frac{5}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx =$
   $= \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\left(x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1\right) = 1.$
4) Вдоль ломаной $L = L_1 \cup L_2$, где $L_1 = \{x: x = 0 \to x = 1;\ y = 0\}$,
   $L_2 = \{x = 1;\ y: y = 0 \to y = 1\}$:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy = \int_{L_1} 2xydx + x^2dy + \int_{L_2} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \underbrace{\int_{L_1} 2xydx + x^2dy}_{\substack{x=x\\ y=0}} + \underbrace{\int_{L_2} 2xydx + x^2dy}_{\substack{x=1\\ y=y}} =$$

$$= \underbrace{\int_{L_1} 2x\cdot 0dx}_{\substack{x=x\\ y=0}} + \underbrace{\int_{L_2} 1^2dy}_{\substack{x=1\\ y=y}} = \int_0^1 0dx + \int_0^1 dy = 1.$$

Замечание. Правда, странно, что кривые разные, а работа одинаковая? Так будет всегда, когда под знаком интеграла стоит полный дифференциал функции нескольких переменных.

Задача 13. Вычислить $\int_{L_+} \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, где L_+ – полуокружность $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $t: 0 \to \pi$.

В этом случае $\begin{cases} x_t' = -a\sin t \\ y_t' = a\cos t \end{cases}$ и поэтому

$$\int_{L_+} \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2} = \int_0^{\pi} \frac{(a\sin t)^2(-a\sin t) - (a\cos t)^2(a\cos t)}{a^2}dt =$$

$$= -a\int_0^{\pi}(\sin^3 t + \cos^3 t)dt = a\int_0^{\pi}\sin^2 t\, d\cos t - a\int_0^{\pi}\cos^2 t\, d\sin t =$$

$$= a\int_0^{\pi}(1-\cos^2 t)d\cos t - a\int_0^{\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t =$$

$$= a\left(\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}\right) - a\left(\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Big|_0^{\pi}\right) = a\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) - 0 =$$

$$= -\frac{4a}{3}.$$

Задача 14. Вычислить $\int_{L_+} xdx + ydy + (x+y-1)dz$, где L_+ – отрезок прямой от $A(1,1,1)$ до $B(2,3,4)$.

Напомним, что каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$, можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{k},$$

где $\bar{p} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ – направляющий вектор прямой.

Тогда параметрическое уравнение прямой имеет вид:

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = kt + z_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)t + y_0 \\ z = (z_1 - z_0)t + z_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом случае точки отрезка AB получаются при $t \in [0,1]$.

В нашем случае уравнение прямой имеет вид:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_t' = 1 \\ y_t' = 2 \\ z_t' = 3 \end{cases}, \quad t \in [0,1].$$ Поэтому

$\int_{L_+} xdx + ydy + (x+y-1)dz =$
$= \int_0^1 \big((t+1)\cdot 1 + (2t+1)\cdot 2 + (t+1+2t+1-1)\cdot 3\big)dt =$
$= \int_0^1 (14t+6)dt = \left((7t^2+6t)\Big|_0^1\right) = 13.$

Задача 15. Вычислить $\int_{L_+} yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}dy + xydz$, где L_+ – дуга винтовой линии

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{a}{2\pi}t \end{cases}, \ t \in [0,2\pi].$$

В этом случае

$$\Rightarrow \begin{cases} x_t' = -R\sin t \\ y_t' = R\cos t \\ z_t' = \frac{a}{2\pi} \end{cases}, \ t \in [0,2\pi] \text{ и тогда}$$

$\int_{L_+} yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}dy + xydz =$
$= \int_0^{2\pi} \left(R\sin t\frac{a}{2\pi}t(-R\sin t) + \frac{a}{2\pi}t\sqrt{R^2-(R\sin t)^2} + R\cos t\, R\sin t\frac{a}{2\pi}\right)dt =$
$= -\frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sin^2 t\,dt + \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t|\cos t|\cos t\,dt + \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt \boxed{=}$

Заметим, что третий интеграл в этой сумме равен 0:

$$\frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt = \frac{aR^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin 2t}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}\,dt = 0.$$

Сумму первых двух интегралов можно записать в виде (раскроем модуль):

$\boxed{=} \frac{aR^2}{2\pi}\left(-\int_0^{2\pi} t\sin^2 t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} t\cos^2 t\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\cos^2 t\,dt\right) =$
$= \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt - \frac{aR^2}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} t(\cos^2 t + \sin^2 t)dt +$
$+ \frac{aR^2}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$
$= \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2t\,dt - \frac{aR^2}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} tdt + \frac{aR^2}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\cos 2t\,dt \boxed{=}$

Найдем $\int t\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\int td\sin 2t = \frac{1}{2}t\sin 2t - \frac{1}{2}\int \sin 2t\,dt =$
$= \frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 4t + C, \ C \in \mathbb{R}.$

$\boxed{=} \frac{aR^2}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{aR^2}{2\pi}\left(\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right) +$
$+ \frac{aR^2}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 4t\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right) =$

$$= \frac{aR^2}{2\pi}\left(0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - \frac{aR^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{9\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{aR^2}{2\pi}\left(0 + \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{4}\right) =$$
$$= -\frac{aR^2}{4\pi}\cdot 2\pi^2 = -\frac{aR^2\pi^2}{2}.$$

Формула Грина

$$\oint_{L_+} Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Задача 16. Криволинейные интегралы по замкнутому контуру L, взятые в положительном направлении, преобразовать в двойные интегралы по компакту M, ограниченному контуром L.

1) $\oint_{L_+}(1 - x^2)ydx + x(1 + y^2)dy = \iint_M \big((1 + y^2) - (1 - x^2)\big)dxdy =$
$= \iint_M (y^2 + x^2)dxdy$

2) $\oint_{L_+}(e^{xy} + 2x\cos y)dx + (e^{xy} + x^2 \sin y)dy =$
$= \iint_M \big((ye^{xy} + 2x\sin y) - (xe^{xy} - 2x\sin y)\big)dxdy =$
$= \iint_M \big((y - x)e^{xy} + 4x\sin y\big)dxdy.$

Задача 17. Вычислить $\oint_{L_+}(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, где L_+ – эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, двумя способами.

1 способ. Параметрическое уравнение эллипса имеет вид:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -a\sin t \\ y'_t = b\cos t \end{cases}$, поэтому

$$\oint_{L_+}(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy =$$
$$= \int_0^{2\pi}\big((a\cos t\, b\sin t + a\cos t + b\sin t)(-a\sin t)\big)dt +$$
$$+ \int_0^{2\pi}(a\cos t\, b\sin t + a\cos t - b\sin t)b\cos t\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}(-a^2 b\cos t\sin^2 t - a^2\cos t\sin t - ab\sin^2 t + ab^2\cos^2 t\sin t +$$
$$+ ab\cos^2 t - b^2\sin t\cos t)dt =$$
$$= -a^2 b\int_0^{2\pi}\sin^2 t\, d\sin t + ab^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\, d\cos t + ab\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos 2t}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}dt -$$
$$- \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin 2t}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}dt - \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin 2t}_{T_0=\frac{2\pi}{2}=\pi}dt =$$
$$= -a^2 b\left(\left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) + ab^2\left(\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = 0.$$

2 способ.

$$\oint_{L_+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\iint_{\text{эл}}(y+1-x-1)dxdy=$$
$$=\iint_{\text{эл}}(y-x)dxdy=$$
$$=\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}}^{\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}}\underbrace{y}_{\text{неч}}\,dy-\int_{-a}^{a}xdx\int_{-\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}}^{\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}}dy=$$
$$=-2\int_{-a}^{a}\underbrace{x\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}}_{\text{неч}}dx=0.$$

Обратите внимание, что интегралы от нечетных функций берутся по симметричным промежуткам, и поэтому они равны нулю.

Задача 18. Вычислить $\oint_{L_+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, где L_+ – окружность $x^2+y^2=ax,\ a>0$, двумя способами.

1 способ. Параметрическое уравнение этой окружности имеет вид:
$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}=+\frac{a}{2}\\ y=\frac{a}{2}\sin t\end{cases},\ t\in[0,2\pi]\ \Rightarrow\begin{cases}x_t'=-\frac{a}{2}\sin t\\ y_t'=\frac{a}{2}\cos t\end{cases}$$, поэтому

$$\oint_{L_+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{a}{2}\cos t+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}\sin t+\frac{a}{2}\cos t+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin t\right)\left(-\frac{a}{2}\sin t\right)dt+$$
$$+\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{a}{2}\cos t+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}\sin t+\frac{a}{2}\cos t+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\sin t\right)\left(\frac{a}{2}\cos t\right)dt=$$
$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}(\underbrace{-2\cos t\sin t}_{T_0=\pi}-\underbrace{\sin t+\cos t}_{T_0=2\pi}+\underbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}_{\substack{=\cos 2t\\ T_0=\pi}})dt+$$
$$+\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}(-\cos t\sin^2 t-\sin^2 t+\cos^2 t\sin t+\underbrace{\cos t\sin t}_{T_0=\pi})dt=$$
$$=-\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,d\sin t-\frac{a^3}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)dt-\frac{a^3}{8}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,d\cos t=$$
$$=-\frac{a^3}{8}\left(\left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)-\frac{a^3}{16}\cdot 2\pi-\frac{a^3}{8}\left(\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right)=0-\frac{\pi a^3}{8}-0=-\frac{\pi a^3}{8}.$$

2 способ. Мы не раз решали задачу на определение пределов интегрирования по этому кругу при переходе в полярные координаты.

$$\oint_{L_+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy=\iint_M(y+1-x-1)dxdy=$$
$$=\iint_M(y-x)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}(r\sin\varphi-r\cos\varphi)\,rdr=$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi-\cos\varphi)\left(\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{a\cos\varphi}\right)=$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\underbrace{\sin\varphi\cos^3\varphi}_{\text{неч}} - \cos^4\varphi)d\varphi = -\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{a^3}{3}\cdot\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)^2 d\varphi = -\frac{a^3}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$= -\frac{a^3}{12}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \underbrace{2\cos 2\varphi}_{T_0=\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 4\varphi}_{T_0=\frac{\pi}{2}})d\varphi = -\frac{a^3}{12}\cdot\frac{3}{2}\cdot\pi = -\frac{\pi a^3}{8}.$$

Задача 19. Доказать, что $\oint_{L_+}(2xy - y)dx + x^2dy$, где L_+ – замкнутый контур, выражает площадь компакта M, ограниченного этим контуром.

Действительно,

$$\oint_{L_+}(2xy - y)dx + x^2dy = \iint_M (2x - 2x + 1)dxdy = \iint_M 1\cdot dxdy = S(M).$$

Аналогично можно доказать, что

$$S(M) = \oint_{L_+} xdy = -\oint_{L_+} ydx = \frac{1}{2}\oint_{L_+} xdy - ydx.$$

Вопрос: при каких $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ интеграл $\oint_{L_+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ задает площадь $S(M)$?

Задача 20. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Параметрическое уравнение эллипса имеет вид:

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -a\sin t \\ y'_t = b\cos t \end{cases}$, поэтому

$$S(M) = \oint_{L_+} xdy = \int_0^{2\pi} a\cos t\, b\cos t\, dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(1 + \cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi =$$
$$= \pi ab.$$

Задача 21. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases},\ t \in [0,2\pi].$

В этом случае $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases},\ t \in [0,2\pi] \Rightarrow \begin{cases} x'_t = -3a\cos^2 t\sin t \\ y'_t = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases}$, поэтому

$$S(M) = \frac{1}{2}\oint_{L_+} xdy - ydx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t - a\sin^3 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)\right)dt =$$
$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t + \cos^2 t\sin^4 t) = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\, dt =$$
$$= \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 4t)dt = \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Задача 22. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases},\ t \in [0,2\pi].$

В этом случае $\begin{cases} x = 2a\cos t - a\cos 2t \\ y = 2a\sin t - a\sin 2t \end{cases}, t \in [0,2\pi] \implies$
$\begin{cases} x'_t = -2a\sin t + 2a\sin 2t \\ y'_t = 2a\cos t - 2a\cos 2t \end{cases}$, поэтому снова удобнее формула:

$$S(M) = \frac{1}{2}\oint_{L_+} xdy - ydx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2a\cos t - a\cos 2t)(2a\cos t - 2a\cos 2t)dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t)dt =$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}(2\cos^2 t - 3\cos t\cos 2t + \cos^2 2t)dt +$$
$$+a^2\int_0^{2\pi}(2\sin^2 t - 3\sin t\sin 2t + \sin^2 2t)dt =$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}\big(3 - 3(\cos t\cos 2t + \sin t\sin 2t)\big)dt =$$
$$= 3a^2\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)dt = 3a^2 \cdot 2\pi = 6\pi a^2.$$

Возникает еще и такая задача: найти $u(x,y)$, если задан $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – дифференциал функции $u(x,y)$.

Формула Ньютона – Лейбница в этом случае имеет вид:
$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} du(x,y) = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1).$$
В частности, если контур замкнут, то интеграл от полного дифференциала равен нулю.

В качестве «пути» из точки (x_1,y_1) в точку (x_2,y_2), как правило, лучше выбирать ломаную $L_1 \cup L_2$, а в качестве (x_1,y_1) лучше брать точку $(0,0)$, при этом «выбранный путь» должен проходить по области определения функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Задача 23. Найти $u(x,y)$, если $du(x,y) = (4x+2y)dx + (2x-6y)dy$.
$$u(x,y) - u(0,0) =$$
$$= \underbrace{\int_{L_1}(4x+2y)dx + (2x-6y)dy}_{L_1:\ y=0,\ x:0\to x} + \underbrace{\int_{L_2}(4x+2y)dx + (2x-6y)dy}_{L_2:\ x=x,\ y:0\to y} =$$
$$= \int_0^x(4x+0)dx + \int_0^y(2x-6y)dy = 2x^2 + 2xy - 3y^2.$$
$$\implies u(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C, C \in \mathbb{R}.$$

Задача 24. Вычислить $\int_{(1,0,3)}^{(6,4,8)} xdx + ydy - zdz$.
$$\int_{(1,0,3)}^{(6,4,8)} xdx + ydy - zdz =$$
$$= \underbrace{\int_{L_1} xdx + ydy - zdz}_{L_1:\ y=0,\ z=3,\ x:1\to 6} + \underbrace{\int_{L_2} xdx + ydy - zdz}_{L_2:\ x=6,\ z=3,\ y:0\to 4} + \underbrace{\int_{L_3} xdx + ydy - zdz}_{L_3:\ x=6,\ y=4,\ z:3\to 8} =$$
$$= \int_1^6 xdx + \int_0^4 ydy - \int_3^8 zdz = \left(\frac{x^2}{2}\bigg|_1^6\right) + \left(\frac{y^2}{2}\bigg|_0^4\right) - \left(\frac{z^2}{2}\bigg|_3^8\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(36 - 1 + 16 - 0 - 64 + 9) = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2.$$