МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ
МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ,

2024

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий. Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках работы специального семинара кафедры математического анализа «Методические вопросы преподавания математических дисциплин на химическом факультете» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета.

Системы дифференциальных уравнений

1. Однородные системы с двумя неизвестными

Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ – это значит найти пару функций $(x(t), y(t))$, которые при подстановке в систему превращают уравнения системы в тождества.

1.1. Сведение к уравнению второго порядка

Задача 1. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \\ \ddot{y} = 3\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - 2x = y \\ \quad 3x = -4y + \dot{y} \\ \ddot{y} = 3\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3x = -4y + \dot{y} \\ 3\dot{x} = 3y - 8y + 2\dot{y} \\ \ddot{y} = -5y + 2\dot{y} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -4y + \dot{y} \\ 3\dot{x} = -5y + 2\dot{y} \\ \ddot{y} = 6\dot{y} - 5y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 6y' + 5y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{3}(-4y + \dot{y})$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = \frac{1}{3}(-4C_1e^t - 4C_2e^{5t} + C_1e^t + 5C_2e^{5t}) = -C_1e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = -C_1e^t + \frac{C_2}{3}e^{5t} \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{5t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t + \frac{C_2}{3} e^{5t} \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Замечание. Сразу заметим, что, во-первых, ответ к этой задаче можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

сделав замену $C_2 \to 3C_2$, или даже к виду

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

добавив замену $C_1 \to -C_1$.

Во-вторых, можно дифференцировать не второе, а первое уравнение системы, получать дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $x(t)$ и лишь потом находить $y(t)$. Легко видеть, что тогда в этой задаче мы получим ответ именно в виде (*).

Вывод. При решении линейных систем ответ может быть записан по-разному, поэтому не совпадение вашего ответа с ответом в учебнике не означает, что вы решили задачу неправильно.

Мы в дальнейшем не будем сосредотачиваться на «красоте» записи ответа, чтобы не тратить на это силы и время…

Задача 2. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}.$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y \\ \ddot{y} = 2\dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - 3x = -2y \\ 2x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = y + \dot{y} \\ 2\dot{x} = -4y + 3y + 3\dot{y} \\ \ddot{y} = -4y + 3y + 3\dot{y} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y + \dot{y} \\ 2\dot{x} = -4y + 3y + 3\dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{y} - y \end{cases}.$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ запишется в виде:

$y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{2}(y + \dot{y})$ (из первого уравнения последней системы):

$x(t) = \frac{1}{2}(C_1 e^t + C_2 t e^t + C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t,$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2}\right) e^t + C_2 t e^t \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 3. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y\,. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dot{x} + x = 2y \\ \qquad x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{y} - y \\ \ddot{y} = \dot{y} - y - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{y} - y \\ \ddot{y} = -y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$y'' + y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ запишется в виде:

$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = (y + \dot{y})$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t - C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$
$$= (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t\,,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t \\ y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t \\ y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 4. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y\,. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - 3x = -y \\ x = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -3y + 3\dot{y} - y \\ \ddot{y} = -4y + 3\dot{y} + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -4y + 3\dot{y} \\ \ddot{y} = 4\dot{y} - 4y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{2}(y + \dot{y})$:

$$x(t) = -C_1 e^{2t} - C_2 t e^{2t} + 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} + C_2 t \cdot 2e^{2t} =$$
$$= (C_1 + C_2) e^{2t} + C_2 t e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2)e^{2t} + C_2te^{2t} \\ y(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2)e^{2t} + C_2te^{2t} \\ y(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x \\ \dot{y} = 8x - y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 8x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 8x - y \\ \ddot{y} = 8\dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + 3x = y \\ 8x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = 8\dot{x} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8x = y + \dot{y} \\ 8\dot{x} = 8y - 3y - 3\dot{y} \\ \ddot{y} = 5y - 3\dot{y} - \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = y + \dot{y} \\ 8\dot{x} = 5y - 3\dot{y} \\ \ddot{y} = -4\dot{y} + 5y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' + 4y' - 5y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-5t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{8}(y + \dot{y})$:

$$x(t) = \frac{1}{8}(C_1e^t + C_2e^{-5t} + C_1e^t - 5C_2e^{5t}) = \frac{1}{8}(2C_1e^t - 4C_2e^{-5t}) =$$
$$= \frac{1}{4}(C_1e^t - 2C_2e^{-5t}),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}(C_1e^t - 2C_2e^{-5t}) \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}(C_1e^t - 2C_2e^{-5t}) \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 6. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = -x + 4y \\ \ddot{y} = -\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - 2x = y \\ \quad x = 4y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = 4y - \dot{y} \\ \dot{x} = 9y - 2\dot{y} \\ \ddot{y} = -9y + 2\dot{y} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y - \dot{y} \\ \dot{x} = 9y - 2\dot{y} \\ \ddot{y} = 6\dot{y} - 9y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = 4y - \dot{y}$:

$$x(t) = 4C_1 e^{3t} + 4C_2 t e^{3t} - 3C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} - C_2 t \cdot 3e^{3t} =$$
$$= (C_1 - C_2)e^{3t} + C_2 t e^{3t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 - C_2)e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = (C_1 - C_2)e^{3t} + C_2 t e^{3t} \\ y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y \\ \dot{y} = x + y \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + x = -5y \\ \quad x = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -\dot{y} - 4y \\ \ddot{y} = \dot{y} - 4y + \dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + \dot{y} \\ \dot{x} = -4y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -4y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$y'' + 4y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i.$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$ запишется в виде:

$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = -y + \dot{y}$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = -C_1 \cos 2t - C_2 \sin 2t - 2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t =$$
$$= (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t \\ y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = (-C_1 + 2C_2) \cos 2t + (-2C_1 - C_2) \sin 2t \\ y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 8. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -x - 3y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = x + 5y \\ \dot{y} = -x - 3y \\ \ddot{y} = -\dot{x} - 3\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} - x = 5y \\ \quad x = -3y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -\dot{x} - 3\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = -3y - \dot{y} \\ \dot{x} = -\dot{y} + 2y \\ \ddot{y} = \dot{y} - 2y - 3\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y - \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{y} + 2y \\ \ddot{y} = -2\dot{y} - 2y\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$y'' + 2y' + 2y = 0.$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i.$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = -3y - \dot{y}$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = -3e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) -$$
$$-e^{-t}(-C_1 \cos t - C_2 \sin t - C_1 \sin t + C_2 \cos t) =$$
$$= e^{-t}\big((-2C_1 - C_2) \cos t + (C_1 - 2C_2) \sin t\big),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\big((-2C_1 - C_2) \cos t + (C_1 - 2C_2) \sin t\big) \\ y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\big((-2C_1 - C_2) \cos t + (C_1 - 2C_2) \sin t\big) \\ y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Иногда этот метод проходит и при решении ***однородных систем дифференциальных уравнений более высокого порядка***. Рассмотрим это на следующем примере.

Задача 9. Решить однородную систему $\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x \end{cases}.$

Продифференцируем второе уравнение системы по t два раза и получим уравнение 4-го порядка относительно y:

$$\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x \\ (\ddot{y})^{\cdot\cdot} = \ddot{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = y \\ x = \ddot{y} \\ y^{(4)} = y \end{cases}.$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_{3,4} = \pm i.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y^{(4)} - y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из второго уравнения последней системы:

$$x(t) = \ddot{y}(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t\,,\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t \end{cases},\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t \\ y(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t \end{cases},\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}.$

1.2. Использование собственных значений и собственных векторов матрицы коэффициентов для решения однородной системы

Решать однородные системы относительно 3-х и более неизвестных функций предыдущим методом очень громоздко (хотя иногда он может быть использован для достаточно простых систем). Рассмотрим другой метод. Причем, для упрощения понимания рассмотрим его сначала на примерах систем с 2-мя неизвестными.

Поскольку в программу по линейной алгебре для химического факультета входит только нахождение собственных значений и собственных векторов матриц (и не входит нахождение присоединенных векторов), то предлагаемым методом можно решить только те системы, в которых основная матрица будет иметь ровно 2 (для систем с двумя неизвестными) и 3 (для систем с тремя неизвестными) линейно независимых собственных вектора.

Замечание. Этим методом будут решены и некоторые задачи, решенные в предыдущем параграфе. У вас есть возможность сравнить эти решения.

Задача 1. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2)$:

$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 1) \Rightarrow$

$p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = -p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1,-1).$

Рассмотрим $\lambda_2 = 5$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2)$:

$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 2-5 & 1 \\ 3 & 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (-3 \quad 1) \Rightarrow$

$-3p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 3p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1,3).$

Тогда решение системы запишется в виде

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \binom{1}{-1} e^{t} + C_2 \binom{1}{3} e^{5t}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \binom{1}{-1} e^{t} + C_2 \binom{1}{3} e^{5t}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{5t} \\ y(t) = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t} \end{cases}, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Замечание. Мы уже отмечали, что ответ в таких задачах можно записывать по-разному. В первой задаче ответ записан в двух видах. В дальнейшем мы будем записывать ответ в векторной форме, поскольку он естественным образом так и возникает.

Задача 2. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x \\ \dot{y} = 8x - y. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(-3-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -5.$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2)$:

$(A-\lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -3-1 & 1 \\ 8 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = (-4 \quad 1) \Rightarrow$

$-4p_1 + p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 4p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1,4).$

Рассмотрим $\lambda_2 = -5$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2)$:

$(A-\lambda_2 E)=\begin{pmatrix}-3+5 & 1\\ 8 & -1+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 4\end{pmatrix}=(2\quad 1)\Rightarrow$

$2p_1+p_2=0 \Leftrightarrow p_2=-2p_1 \Rightarrow \bar{u}_1=(1,-2).$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1\bar{u}_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}=C_1\binom{1}{4}e^{t}+C_2\binom{1}{-2}e^{-5t},\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1\binom{1}{4}e^{t}+C_2\binom{1}{-2}e^{-5t},\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

Задача 3. Решить однородную систему $\begin{cases}\dot{x}=-5x-6y\\ \dot{y}=8x+9y.\end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A=\begin{pmatrix}-5 & -6\\ 8 & 9\end{pmatrix}.$

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$|A-\lambda E|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-5-\lambda & -6\\ 8 & 9-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$(-5-\lambda)(9-\lambda)+48=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-45+48=0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$

Рассмотрим $\lambda_1=1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1=(p_1,p_2)$:

$(A-\lambda_1 E)=\begin{pmatrix}-5-1 & -6\\ 8 & 9-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ 8 & 8\end{pmatrix}=(1\quad 1)\Rightarrow$

$p_1+p_2=0 \Leftrightarrow p_2=-p_1 \Rightarrow \bar{u}_1=(1,-1).$

Рассмотрим $\lambda_2=3$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2=(p_1,p_2)$:

$(A-\lambda_2 E)=\begin{pmatrix}-5-3 & -6\\ 8 & 9-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -6\\ 8 & 6\end{pmatrix}=(4\ \ 3)\Rightarrow$

$4p_1+3p_2=0 \Leftrightarrow p_2=-\frac{4}{3}p_1 \Rightarrow \bar{u}_1=(3,-4).$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1\bar{u}_1 e^{\lambda_1 t}+C_2\bar{u}_2 e^{\lambda_2 t}=C_1\binom{1}{-1}e^{t}+C_2\binom{3}{-4}e^{3t},\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=C_1\binom{1}{-1}e^{t}+C_2\binom{3}{-4}e^{3t},\ \ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$

Задача 4. Решить однородную систему $\begin{cases}\dot{x}=10x-6y\\ \dot{y}=18x-11y.\end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 18 & -11 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 18 & -11-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(10-\lambda)(-11-\lambda) + 108 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 110 + 108 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2.$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2)$:

$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 10-1 & -6 \\ 18 & -11-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 18 & -12 \end{pmatrix} = (3 \quad -2) \Rightarrow$

$3p_1 - 2p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = \frac{3}{2}p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (2{,}3).$

Рассмотрим $\lambda_2 = -2$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2)$:

$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} 10+2 & -6 \\ 18 & -11+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 8 & -9 \end{pmatrix} = (2 \quad -1) \Rightarrow$

$2p_1 - p_2 = 0 \Leftrightarrow p_2 = 2p_1 \Rightarrow \bar{u}_1 = (1{,}2).$

Тогда решение системы запишется в виде

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} = C_1\binom{2}{3}e^t + C_2\binom{1}{2}e^{-2t},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\binom{2}{3}e^t + C_2\binom{1}{2}e^{-2t},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

Задача 5. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y - 2z \\ \dot{y} = 10x + 4y + 2z \\ \dot{z} = 2x + y + 3z\,. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ 10 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 & -2 \\ 10 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(-5-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) - 8 - 20 + 4(4-\lambda) - 2(-5-\lambda) + 20(3-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda^2 + \lambda - 20)(3-\lambda) - 28 + 16 - 4\lambda + 10 + 2\lambda + 60 - 20\lambda = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 20\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda - 60 - 12 - 2\lambda + 70 - 20\lambda = 0$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -5-1 & -2 & -2 \\ 10 & 4-1 & 2 \\ 2 & 1 & 3-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & -2 & -2 \\ 10 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_3 \\ p_2 = -4p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_1 = (1, -4, 1).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = -1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -5+1 & -2 & -2 \\ 10 & 4+1 & 2 \\ 2 & 1 & 3+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 10 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_3 = 0 \\ p_2 = -2p_1 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_2 = (1, -2, 0).$$

Рассмотрим $\lambda_3 = 2$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_3 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_3 E) = \begin{pmatrix} -5-2 & -2 & -2 \\ 10 & 4-2 & 2 \\ 2 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -7 & -2 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = 0 \\ p_2 = -p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_3 = (0, -1, 1).$$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \bar{u}_3 e^{\lambda_3 t} =$$
$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 6. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 4z \\ \dot{y} = -8x - 3y + 2z \\ \dot{z} = -2x - 4y + 6z \,. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -8 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -4 \\ -8 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-1-\lambda)(-3-\lambda)(6-\lambda) - 8 - 128 + 8(\lambda+3) + 8(-1-\lambda) + 16(6-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 4\lambda + 3)(6-\lambda) - 136 + 8\lambda + 24 - 8 - 8\lambda + 96 - 16\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda + 6\lambda^2 + 24\lambda + 18 - 24 - 16\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Очевидно, что $\lambda = 1$ является корнем этого уравнения. Поделив «столбиком» $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$ на $\lambda - 1$, получим

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -2.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} -1-1 & 2 & -4 \\ -8 & -3-1 & 2 \\ -2 & -4 & 6-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -8 & -4 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -12 & 18 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = -p_3 \\ 2p_2 = 3p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_1 = (-1,3,2).$$

Рассмотрим $\lambda_2 = 3$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -1-3 & 2 & -4 \\ -8 & -3-3 & 2 \\ -2 & -4 & 6-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -8 & -6 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2p_1 = -p_3 \\ p_2 = p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_2 = (-1,2,2).$$

Рассмотрим $\lambda_3 = -2$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_3 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A - \lambda_3 E) = \begin{pmatrix} -1+2 & 2 & -4 \\ -8 & -3+2 & 2 \\ -2 & -4 & 6+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -8 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 2p_3 \end{cases} \Rightarrow \bar{u}_3 = (0,2,1).$$

Тогда решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \bar{u}_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 \bar{u}_3 e^{\lambda_3 t} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = -x + y + 2z\,. \end{cases}$

Основная матрица этой системы будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем собственные значения и собственные векторы этой матрицы.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 3 - 3 + \lambda + 2 + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)(2-\lambda) - 4 + \lambda + 6 - 3\lambda + 6 - 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 + 8 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Рассмотрим $\lambda_1 = 0$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_1 = (p_1, p_2, p_3)$:

$$(A-\lambda_1 E)=A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -3\end{pmatrix}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p_1=-p_3\\ p_2=-3p_3\end{cases}\Rightarrow \bar{u}_1=(1,3,-1).$$

Рассмотрим $\lambda_2=\lambda_3=1$. Найдем собственный вектор $\bar{u}_2=(p_1,p_2,p_3)$:

$$(A-\lambda_2 E)=\begin{pmatrix}2-1 & -1 & -1\\ 3 & -2-1 & -3\\ -1 & 1 & 2-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim(1\quad -1\quad -1).$$

Нам повезло! В этом случае будет два линейно независимых собственных вектора, например, $\bar{u}_2=(1,1,0)$ и $\bar{u}_3=(1,0,1)$.

Поэтому решение системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=C_1\bar{u}_1e^{\lambda_1 t}+C_2\bar{u}_2e^{\lambda_2 t}+C_3\bar{u}_3e^{\lambda_3 t}=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^t,\ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 3\\ -1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^t,\ C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}.$

2. Неоднородные системы с двумя неизвестными

Решить неоднородную систему $\begin{cases}\dot{x}=ax+by+f(t)\\ \dot{y}=cx+dy+\ g(t)\end{cases}$ – это значит найти пару функций $(x(t),y(t))$, которые при подстановке в систему превращают уравнения системы в тождества. Такие системы решаются методом вариации постоянных. Рассмотрим этот метод на примерах.

Задача 1. Решить неоднородную систему $\begin{cases}\dot{x}=x-2y\\ \dot{y}=x-y+\frac{1}{2\sin t}.\end{cases}$

1. Рассмотрим сначала однородную систему $\begin{cases}\dot{x}=x-2y\\ \dot{y}=x-y.\end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases}\dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dot{x} - x = -2y \\ \quad x = y + \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = -y + \dot{y} - \dot{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y + \dot{y} \\ \dot{x} = -y + \dot{y} \\ \ddot{y} = -y\,.\end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' + y = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = y + \dot{y}$ (из первого уравнения последней системы):

$$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_1 \cos t - C_2 \sin t =$$
$$= (C_1 - C_2) \sin t + (C_1 + C_2) \cos t\,,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases}x(t) = (C_1 - C_2) \sin t + (C_1 + C_2) \cos t \\ y(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t\end{cases},\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Проделаем вариацию постоянных, то есть будем искать решение системы $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2\sin t}\end{cases}$ в виде

$$\begin{cases}x(t) = (C_1(t) - C_2(t)) \sin t + (C_1(t) + C_2(t)) \cos t \\ y(t) = C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t\end{cases}, \qquad (*)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – некоторые функции.

Подставим функции (*) в исходную систему, получим систему тождеств:

$$\begin{cases}(C_1'+C_2')\cos t-(C_1+C_2)\sin t+(C_1'-C_2')\sin t+(C_1-C_2)\cos t\equiv\\ \qquad\equiv(C_1+C_2)\cos t+(C_1-C_2)\sin t-2C_1\sin t-2C_2\cos t\\ C_1'\sin t+C_1\cos t+C_2'\cos t-C_2\sin t\equiv\\ \qquad\equiv(C_1-C_2)\sin t+(C_1+C_2)\cos t-C_1\sin t-C_2\cos t+\frac{1}{2\sin t}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(C_1'+C_2')\cos t+(C_1'-C_2')\sin t=0\\ C_1'\sin t+C_2'\cos t=\frac{1}{2\sin t}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}C_1'(\cos t+\sin t)+C_2'(\cos t-\sin t)=0\\ C_1'\sin t\qquad\qquad+C_2'\cos t\qquad\quad=\frac{1}{2\sin t}\end{cases}.$$

Мы получили линейную систему относительно функций C_1' и C_2'. Эту систему можно решить методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos t+\sin t & \cos t-\sin t\\ \sin t & \cos t\end{vmatrix}=$$
$$=(\cos t+\sin t)\cos t-(\cos t-\sin t)\sin t\equiv 1,$$

поэтому

$$\Delta_{C_1'}=\begin{vmatrix}0 & \cos t-\sin t\\ \frac{1}{2\sin t} & \cos t\end{vmatrix}=-\frac{\cos t-\sin t}{2\sin t}=C_1',$$

$$\Delta_{C_2'}=\begin{vmatrix}\cos t+\sin t & 0\\ \sin t & \frac{1}{2\sin t}\end{vmatrix}=\frac{\cos t+\sin t}{2\sin t}=C_2'.$$

Проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения, получим:

$$C_1(t)=-\frac{1}{2}\int\frac{\cos t-\sin t}{2\sin t}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{d\sin t}{\sin t}+\frac{t}{2}=-\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_1,\ A_1\in\mathbb{R}.$$
$$C_2(t)=\frac{1}{2}\int\frac{\cos t+\sin t}{2\sin t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\sin t}{\sin t}+\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_2,\ A_2\in\mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь вид:

$$x(t)=(C_1(t)-C_2(t))\sin t+(C_1(t)+C_2(t))\cos t=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_1-\frac{1}{2}\ln|\sin t|-\frac{t}{2}-A_2\right)\sin t+$$
$$+\left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_1+\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_2\right)\cos t=$$
$$=(-\ln|\sin t|+A_1-A_2)\sin t+(t+A_1+A_2)\cos t,$$

$$y(t)=C_1(t)\sin t+C_2(t)\cos t=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_1\right)\sin t+\left(\frac{1}{2}\ln|\sin t|+\frac{t}{2}+A_2\right)\cos t,\ A_1,A_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = (-\ln|\sin t| + A_1 - A_2)\sin t + (t + A_1 + A_2)\cos t \\ y(t) = \left(-\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_1\right)\sin t + \left(\frac{1}{2}\ln|\sin t| + \frac{t}{2} + A_2\right)\cos t \end{cases}, A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Задача 2. Решить неоднородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t} \\ \dot{y} = -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t}. \end{cases}$

1. Рассмотрим сначала однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y. \end{cases}$

Продифференцируем второе уравнение системы по t, а в первых двух уравнениях системы выразим $\dot{x}$ и x через $\dot{y}$ и y, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 4y \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} + 2x = 4y \\ \quad 2x = 4y - \dot{y} \\ \ddot{y} = -2\dot{x} + 4\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 2x = 4y - \dot{y} \\ \dot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = 2\dot{y}\,. \end{cases}$$

Рассмотрим и решим отдельно последнее уравнение системы:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Уравнение относительно характеристического многочлена для этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = 0$ запишется в виде:

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Функцию $x(t)$ найдем из условия $x = \frac{1}{2}(4y - \dot{y})$:

$$x(t) = \frac{1}{2}(4C_1 + 4C_2e^{2t} - 2C_2e^{2t}) = \frac{1}{2}(4C_1 + 2C_2e^{2t}) = 2C_1 + C_2e^{2t},$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно общее решение однородной системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 + C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1 + C_2e^{2t} \end{cases},\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Проделаем вариацию постоянных, то есть будем искать решение системы $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t} \\ \dot{y} = -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t} \end{cases}$ в виде

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1(t) + C_2(t)e^{2t} \\ y(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{2t} \end{cases}, \qquad (*)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ – некоторые функции.

Подставим функции (*) в исходную систему, получим систему тождеств:

$$\begin{cases} 2C_1' + C_2'e^{2t} + 2C_2e^{2t} = -4C_1 - 2C_2e^{2t} + 4C_1 + 4C_2e^{2t} + \frac{1}{1+e^t} \\ C_1' + C_2'e^{2t} + 2C_2e^{2t} = -4C_1 - 2C_2e^{2t} + 4C_1 + 4C_2e^{2t} - \frac{1}{1+e^t} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2C_1' + C_2'e^{2t} = \frac{1}{1+e^t} \\ C_1' + C_2'e^{2t} = -\frac{1}{1+e^t} \end{cases}.$$

Мы получили линейную систему относительно функций C_1' и C_2'. Эту систему можно решить методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & e^{2t} \\ 1 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t},$$

$$\Delta_{C_1'} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+e^t} & e^{2t} \\ -\frac{1}{1+e^t} & e^{2t} \end{vmatrix} = \frac{2e^{2t}}{1+e^t},$$

$$\Delta_{C_2'} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{1+e^t} \\ 1 & -\frac{1}{1+e^t} \end{vmatrix} = \frac{-3}{1+e^t}.$$

Поэтому

$$C_1' = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{2}{1+e^t},$$

$$C_2' = \frac{\Delta_{C_2'}}{\Delta} = \frac{-3}{e^{2t}(1+e^t)}.$$

Проинтегрируем полученные дифференциальные уравнения, получим:

$$C_1(t) = 2\int \frac{dt}{1+e^t} = \begin{vmatrix} e^t = u, t = \ln u, \\ dt = \frac{du}{u} \end{vmatrix} = 2\int \frac{du}{u(u+1)} =$$

$$= 2\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1}\right) = 2\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + A_1 = 2\ln\left|\frac{e^t}{e^t+1}\right| + A_1 =$$

$$= 2\ln e^t - 2\ln(e^t+1) + A_1 = 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1,\ A_1 \in \mathbb{R}.$$

$$C_2(t) = -3\int \frac{dt}{e^{2t}(1+e^t)} = \left| \begin{matrix} e^t = u, t = \ln u, \\ dt = \frac{du}{u} \end{matrix} \right| = -3\int \frac{du}{u^3(u+1)} =$$
$$= -3\left(\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} + \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u+1}\right) =$$
$$= -3\left(\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2}\right) + A_2 = -3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2,\ A_2 \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут иметь вид:

$$x(t) = 2C_1(t) + C_2(t)e^{2t} =$$
$$= 2(2t - 2\ln(e^t+1) + A_1) + \left(-3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2\right)e^{2t} =$$
$$= 4t - 4\ln(e^t+1) + 2A_1 - 3te^{2t} + 3e^{2t}\ln(e^t+1) - 3e^t + \frac{3}{2} + A_2e^{2t} =$$
$$= (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 4t - 4\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + 2A_1,$$

$$y(t) = C_1(t) + C_2(t)e^{2t} =$$
$$= 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1 + \left(-3t + 3\ln(e^t+1) - \frac{3}{e^t} + \frac{3}{2e^{2t}} + A_2\right)e^{2t} =$$
$$= 2t - 2\ln(e^t+1) + A_1 - 3te^{2t} + 3e^{2t}\ln(e^t+1) - 3e^t + \frac{3}{2} + A_2e^{2t} =$$
$$= (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 2t - 2\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + A_1, A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 4t - 4\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + 2A_1 \\ y(t) = (A_2 - 3t + 3\ln(e^t+1))e^{2t} - 3e^t + 2t - 2\ln(e^t+1) + \frac{3}{2} + A_1 \end{cases},$$

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}$.