МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И ХИМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТЫ
МГУ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ШКОЛЫ
МГУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЧАСТЬ 1

А.И.КОЗКО.Л.М.ЛУЖИНА, А.А.ЛУЖИН, В.Г.ЧИРСКИЙ,

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок – облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов. В этом пособии содержится материал, относящийся к курсу математического анализа, читаемому студентам второго курса химического факультета МГУ.

Теорема (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть $f(t_1, t_2)$ непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^2$, причем, $\frac{\partial f}{\partial t_2}$ существует и непрерывна в $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет решение, причем единственное в том смысле, что если есть два ее решения y_1 и y_2, определенные на интервалах (a_1, b_1) и (a_2, b_2), содержащих точку x_0, то они совпадают на пересечении (a, b) этих интервалов.

I. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение 1-го порядка можно записать в виде

$$\boldsymbol{y' = f(x)g(y),}$$

то оно называется ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными***.

Замечание. Если уравнение $g(y) = 0$ имеет действительные корни, то каждому действительному корню $y = b$ будет соответствовать прямая $y \equiv b$, которая будет решением исходного дифференциального уравнения, причем, эти решения зачастую легко потерять, использовав стандартные методы.

Задача 1. Решить уравнение $xy' - y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$.

Очевидно, что уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно переписать в виде: $y' = \frac{1}{x} y$.

$xy' = y$

$x \frac{dy}{dx} = y$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ (при этом потеряно решение $y \equiv 0$)

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем это уравнение, получим

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C_1}, \ \ C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = |x| \cdot e^{C_1}$

$|y| = |x| \cdot C_2$, где $C_2 = e^{C_1} > 0.$

Такое уравнение с модулями легко решается:

$y = \pm C_2 x,$ где $C_2 > 0 \ \Longrightarrow \ \pm C_2 \neq 0$

Заметим, что решение $y \equiv 0$, которое мы «потеряли» выше, как раз и получается при $C_2 = 0$.

Поэтому общее решение $xy' - y = 0$ будет иметь вид $y = Cx, C \in \mathbb{R}$.

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$.

$4 = C(-2) \Longrightarrow C = -2 \Longrightarrow y_{ч} = -2x.$

Ответ: Общее решение $y = Cx, C \in \mathbb{R}$, частное решение $y_{ч} = -2x$.

Важное замечание. У некоторых студентов складывается ощущение, что в полученном уравнении $G(y)dy = F(x)dx$ мы левую часть уравнения интегрируем по y, а правую часть – по x. Но это не так. Так как $y = y(x)$, то интегралы имеют вид $\int G\big(y(x)\big)dy(x) = \int F(x)dx$, и интегрирование обеих частей уравнения производится по переменной x.

Замечание. В первой задаче мы подробно расписали, как меняется значение произвольной постоянной, и даже обозначили эти постоянные разными символами. В следующих задачах мы постепенно будем переходить к тому, что символ будет оставаться тем же, но будет меняться его описание.

Задача 2. Решить уравнение $xy' + y = 0$ и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$.

Очевидно, что уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно переписать в виде: $y' = \frac{1}{x}y$.

$xy' = -y$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ (при этом потеряно решение $y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C_1,\ \ C_1 \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем это уравнение, получим

$e^{\ln|y|} = e^{-\ln|x|+C_1},\ \ C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = |x|^{-1} \cdot e^{C_1}$ (мы воспользовались свойством логарифма: коэффициент перед логарифмом можно занести в степень подлогарифмического выражения)

$y = \frac{\pm C_2}{x}$, где $C_2 > 0 \ \Longrightarrow\ \pm C_2 \neq 0$

Заметим, что решение $y \equiv 0$, которое мы «потеряли» выше, как раз и получается при $C_2 = 0$.

Поэтому общее решение $xy' + y = 0$ будет иметь вид $y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$.

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$.

$4 = \frac{C}{-2} \Longrightarrow C = -8 \Longrightarrow y_{ч} = -\frac{8}{x}$.

Ответ: Общее решение $y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$; частное решение $y_{ч} = -\frac{8}{x}$.

Задача 3. Решить уравнение $y' = y$ и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$.

Очевидно, что уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$y' = y$

$\frac{dy}{y} = dx$ (при этом потеряно решение $y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + C_1,\ \ C_1 \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем это уравнение, получим

$e^{\ln|y|} = e^{x+C_1},\ \ C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = e^x \cdot e^{C_1}$

$y = \pm C_2 e^x$, где $C_2 > 0 \ \Longrightarrow\ \pm C_2 \neq 0$.

Заметим, что решение $y \equiv 0$, которое мы «потеряли» выше, как раз и получается при $C_2 = 0$.

Поэтому общее решение уравнения $y' = y$ будет иметь вид $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$.

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(-2) = 4$:

$4 = Ce^{-2} \Longrightarrow C = 4e^2 \Longrightarrow y_ч = 4e^2e^x = 4e^{x+2}$.

Ответ: Общее решение $y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$; частное решение $y_ч = 4e^{x+2}$.

Задача 4. Решить уравнение $x^2y' + y = 0$.

Очевидно, что уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$x^2\frac{dy}{dx} = -y$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$ (при этом потеряно решение $y \equiv 0$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x^2}$

$\ln|y| = \frac{1}{x} + C_1, \ \ C_1 \in \mathbb{R}$.

Пропотенцируем это уравнение, получим

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{x}+C_1}, \ \ C_1 \in \mathbb{R}$

$|y| = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{C_1}$

$y = \pm C_2e^{\frac{1}{x}}$, где $C_2 > 0 \ \Longrightarrow \ \pm C_2 \neq 0$.

Заметим, что решение $y \equiv 0$, которое мы «потеряли» выше, как раз и получается при $C_2 = 0$.

Поэтому общее решение уравнения $x^2y' + y = 0$ будет иметь вид $y = Ce^{\frac{1}{x}}, C \in \mathbb{R}$.

Ответ: Общее решение $y = Ce^{\frac{1}{x}}, C \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Решить уравнение $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно преобразовать к виду

$x(y+1)+\frac{dy}{dx}y(x+1)=0$

$\frac{ydy}{y+1}=-\frac{xdx}{x+1}$ (при этом потеряно решение $y\equiv -1$).

Проинтегрируем это уравнение

$\int \frac{y}{y+1}dy=-\int \frac{x}{x+1}dx$

$\int \frac{y+1-1}{y+1}dy=-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx$

$\int \left(1-\frac{1}{y+1}\right)dy=\int \left(-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$y-\ln|y+1|=-x+\ln|x+1|+C_1,\ \ C_1\in\mathbb{R}.$

Отметим, что это уже решение уравнения. Но мы должны понимать, что любой ответ должен быть записан в максимально компактном виде, удобном для его дальнейшего анализа. Поэтому преобразуем полученное равенство к следующему виду:

$x+y=\ln|y+1|+\ln|x+1|+C_1,\ \ C_1\in\mathbb{R}$

$x+y+C=\ln|(y+1)(x+1)|,\ \ C\in\mathbb{R}.$

Пропотенцируем это уравнение, получим

$|(y+1)(x+1)|=Ce^{x+y},\ \ C>0$

$(y+1)(x+1)=Ce^{x+y}, C\in\mathbb{R},$

заметив, что решение $y\equiv -1$, которое мы «потеряли» выше, как раз и получается при $C=0$.

Поэтому общее решение уравнения $x+xy+y'(y+xy)=0$ будет иметь вид $(y+1)(x+1)=Ce^{x+y}, C\in\mathbb{R}$.

Ответ: Общее решение $(y+1)(x+1)=Ce^{x+y}, C\in\mathbb{R}$.

Заметим, что, несмотря на все наши усилия, задать решение уравнения в явном виде нам не удалось. Более того, иногда решение уравнения останавливается на записи его в виде равенства интегралов. А далее приходится исследовать эти интегралы.

Задача 6. Решить уравнение $(x^2+x)y'=2y+1$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно преобразовать к виду

$x(x+1)\frac{dy}{dx}=2y+1$

$\frac{dy}{2y+1} = \frac{dx}{x(x+1)}$ (при этом потеряно решение $y \equiv -\frac{1}{2}$).

Проинтегрируем это уравнение

$$\int \frac{1}{2y+1} dy = \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$\int \frac{1}{2y+1} dy = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|x| - \ln|x+1| + C_1, \ \ C_1 \in \mathbb{R}.$$

Это уже решение уравнения, но его, конечно, нужно преобразовать к виду, более удобному для анализа.

$$\ln|2y+1| = 2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

$$|2y+1| = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot e^C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Как уже отмечалось выше, сделаем «переобозначение» $e^C \to C$. Раскрыв модуль и заметив, что «потерянное» решение $y \equiv -\frac{1}{2}$ получается как раз при «новом» $C = 0$, получаем, что общее решение этого уравнения запишется в виде

$$2y+1 = C\left(\frac{x}{x+1}\right)^2, \ C \in \mathbb{R}$$

$$y = C\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{1}{2}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y = C\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{1}{2}, \ C \in \mathbb{R}.$

Задача 7. Решить уравнение $(x^2+1)y' + 1 + y^2 = 0$.

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как его можно преобразовать к виду

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = -(1+y^2)$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

Проинтегрируем это уравнение

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = -\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\operatorname{arctg} y = -\operatorname{arctg} x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся формулами:

1. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\alpha) = \alpha$
2. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)-\operatorname{tg}(\beta)}{1+\operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$ $,\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi m,\ \alpha-\beta\ \neq \frac{\pi}{2}+\pi l,$ $n, m, l \in \mathbb{Z}$.

Применив функцию $\operatorname{tg}(\cdot)$ к обеим частям равенства в решении уравнения, получим

$$y = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} C - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x}{1+\operatorname{tg} C \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x}, C \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{C_1 - x}{1+C_1 x},\ C_1 \in \mathbb{R} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} C - \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x}{1+\operatorname{tg} C \operatorname{tg}\operatorname{arctg} x} \Rightarrow y = \frac{C-x}{1+Cx},\ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y = \frac{C-x}{1+Cx}$, $C \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1}{x}$.

Задача 8. Решить уравнение $y' = 2\sqrt{y}\ln x$ и найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(e) = 1$.

Очевидно, что уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \ln x\, dx$ (при этом потеряно решение $y \equiv 0$)**.**

Проинтегрируем это уравнение

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \ln x\, dx$$

$$\sqrt{y} = x\ln x - \int x d\ln x\ .$$

$$\sqrt{y} = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$\sqrt{y} = x\ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}$ – общее решение дифференциального уравнения.

Найдем частное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y(e) = 1$:

$$1 = e\ln e - e + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y_{ч} = x\ln x - x + 1.$$

Ответ: Общее решение $y = x\ln x - x + C, C \in \mathbb{R}$; частное решение $y_{ч} = x\ln x - x + 1$.

II. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Вариация постоянной

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка имеют вид

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным дифференциальным однородным уравнением. Если $Q(x) \not\equiv 0$, то уравнение является неоднородным, и его ***решение является суммой общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения.*** Существует несколько способов решения неоднородных линейных уравнений.

С помощью ***вариации постоянной*** решить уравнения.

Задача 1. Решить уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{\left(-\frac{3}{x}\right)}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{x}_{Q(x)} \quad \text{(линейное уравнение).}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y' - \frac{3y}{x} = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$y' - \frac{3y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{3}{x}dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = 3\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = 3\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Потенцируем это уравнение:

$|y| = |x|^3 \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot |x|^3,\ \ C > 0$

$y = \pm C|x|^3,\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = Cx^3, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' - \frac{3y}{x} = x$ в виде $y = C(x)x^3$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' - \frac{3y}{x} = x$.

Так как в этом случае $y' = C' \cdot x^3 + C \cdot 3x^2$, то при подстановке в уравнение получаем

$C' \cdot x^3 + C \cdot 3x^2 - \frac{3 \cdot Cx^3}{x} \equiv x \implies C' \cdot x^3 \equiv x \Rightarrow C' \cdot x^2 \equiv 1$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^2} \implies \int dC = \int \frac{dx}{x^2} \Rightarrow C(x) = -\frac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C(x)x^3 \Rightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{x} + C\right) \cdot x^3 = \underbrace{Cx^3}_{\substack{\text{Общее} \\ \text{решение} \\ \text{однородного} \\ \text{уравнения}}} + \underbrace{(-x^2)}_{\substack{\text{частное} \\ \text{решение} \\ \text{неоднородного} \\ \text{уравнения}}} .$$

В том, что $y = -x^2$ – частное решение исходного неоднородного уравнения, легко убедиться подстановкой.

Ответ: $y = Cx^3 - x^2,\ C \in \mathbb{R}$.

Задача 2. Решить уравнение $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{\frac{e^{-x^2}}{x}}_{Q(x)} \quad \text{(линейное уравнение).}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y' + \frac{2y}{x} = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$

$\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -2\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -2\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Потенцируем это уравнение:

$|y| = |x|^{-2} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

$|y| = C \cdot x^{-2},\ \ C > 0$

$y = \pm Cx^{-2},\ \ C > 0$ и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = \frac{C}{x^2}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$ в виде $y = \frac{C(x)}{x^2}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

Так как в этом случае $y' = \frac{C' \cdot x^2 - C \cdot 2x}{x^4} = \frac{C'}{x^2} - \frac{-2C}{x^3}$, то при подстановке в уравнение получаем

$\frac{C'}{x^2} - \frac{-2C}{x^3} + \frac{2C}{x^3} \equiv \frac{e^{-x^2}}{x} \quad \Rightarrow \frac{C'}{x^2} \equiv \frac{e^{-x^2}}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = xe^{-x^2} \;\Rightarrow \int dC = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Rightarrow$
$C(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C,\; C \in \mathbb{R}$.

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^2} \Rightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \underbrace{\frac{C}{x^2}}_{\substack{\text{Общее}\\ \text{решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\left(-\frac{e^{-x^2}}{2x^2}\right)}_{\substack{\text{частное}\\ \text{решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}} ,\; C \in \mathbb{R} .$$

Замечание. В том, что $y = -\frac{e^{-x^2}}{2x^2}$ является частным решением исходного неоднородного уравнения, убедитесь сами с помощью подстановки.

Ответ: $y(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2},\; C \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Решить уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{(-\operatorname{tg} x)}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{\operatorname{ctg} x}_{Q(x)} \quad \text{(линейное уравнение).}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{tg} x$

$\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x \, dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x}$

$\ln|y| = -\ln|\cos x| + C, \ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение и, учитывая, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = \frac{C}{\cos x}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$ в виде $y = \frac{C(x)}{\cos x}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Так как в этом случае $y' = \frac{C' \cdot \cos x - C(x) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$, то при подстановке в уравнение получаем

$\frac{C'}{\cos x} + \frac{C \sin x}{\cos^2 x} - \frac{C}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \equiv \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow \frac{C'}{\cos x} \equiv \frac{\cos x}{\sin x}$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$\frac{dC}{dx} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} \ \Longrightarrow \ \int dC = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right) dx \ \Longrightarrow$
$C(x) = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C, \ C \in \mathbb{R}$.

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$y(x) = \frac{C(x)}{\cos x} \ \Longrightarrow y(x) = \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C\right) \cdot \frac{1}{\cos x} =$

$$= \underbrace{\frac{C}{\cos x}}_{\substack{\text{Общее} \\ \text{решение} \\ \text{однородного} \\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\left(\frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\cos x} + 1\right)}_{\substack{\text{частное} \\ \text{решение} \\ \text{неоднородного} \\ \text{уравнения}}}, \ C \in \mathbb{R} .$$

Замечание. В том, что $y = -\frac{e^{-x^2}}{2x^2}$ является частным решением исходного неоднородного уравнения, убедитесь сами с помощью подстановки.

Ответ: $y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|}{\cos x} + 1, \ C \in \mathbb{R}.$

Замечание. Значение интеграла $\int \frac{dx}{\sin x}$ либо надо помнить (табличный), либо уметь быстро посчитать, например, так:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx = -\int \frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

или так:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}d\operatorname{tg}\frac{x}{2} =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Задача 4. Решить уравнение $(2x+1)y' + y = x$.

Уравнение можно переписать в виде

$$y' + \underbrace{\frac{1}{2x+1}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{\frac{x}{2x+1}}_{Q(x)} \quad \text{(линейное уравнение).}$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $(2x+1)y' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$(2x+1)y' = -y$

$(2x+1)\frac{dy}{dx} = -y$

$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2x+1}dx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{2x+1}$

$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение:

$|y| = |2x+1|^{-\frac{1}{2}} \cdot e^C,\ C \in \mathbb{R}$

и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y = \frac{C}{\sqrt{|2x+1|}}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной.

При $2x+1 > 0$ будем искать решение в виде $y = \frac{C(x)}{\sqrt{2x+1}}$, и тогда

$$y' = \frac{C'\sqrt{2x+1} - C\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\cdot 2}{2x+1} = \frac{C'}{\sqrt{2x+1}} - \frac{C}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}.$$

Подставим эту функцию в уравнение $(2x+1)y' + y = x$.

$$(2x+1)\left(\frac{C'}{\sqrt{2x+1}} - \frac{C}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}\right) + \frac{C(x)}{\sqrt{2x+1}} = x$$

$\Rightarrow\ C' \cdot \sqrt{2x+1} \equiv x$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$$\frac{dC}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \int dC = \int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1-1)dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{2x+1} - \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C \Rightarrow$$
$$C(x) = \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Поэтому в этом случае общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow y(x) = \left(\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$= \underbrace{\frac{C}{\sqrt{2x+1}}}_{\substack{\text{Общее}\\ \text{решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\frac{1}{6}(2x+1) - \frac{1}{2}}_{\substack{\text{частное}\\ \text{решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}} = \frac{C}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2x+1-3}{6} = \frac{C}{\sqrt{2x+1}} + \frac{x-1}{3},\ \ C \in \mathbb{R}.$$

При $2x+1 < 0$ будем искать решение в виде $y = \frac{C(x)}{\sqrt{-2x-1}}$, и тогда

$$y' = \frac{C'\sqrt{-2x-1} - C\cdot\frac{1}{2\sqrt{-2x-1}}\cdot(-2)}{-2x-1} = \frac{C'}{\sqrt{-2x-1}} + \frac{C}{(-2x-1)\sqrt{-2x-1}}.$$

Подставим эту функцию в уравнение $(2x+1)y' + y = x$.

$$-(-2x-1)\left(\frac{C'}{\sqrt{-2x-1}} + \frac{C}{(-2x-1)\sqrt{-2x-1}}\right) + \frac{C}{\sqrt{-2x-1}} = x$$

$\Rightarrow\ -C' \cdot \sqrt{-2x-1} \equiv x$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{-2x-1}} \Rightarrow \int dC = -\int \frac{xdx}{\sqrt{-2x-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{(-2x-1+1)dx}{\sqrt{2x+1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{-2x-1} + \frac{1}{\sqrt{-2x-1}}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{-2x-1} + C \Rightarrow$$
$$C(x) = -\frac{1}{6}(-2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{-2x-1} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Поэтому в этом случае общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x)=\frac{C(x)}{\sqrt{-2x-1}} \Rightarrow y(x)=\left(-\frac{1}{6}(-2x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{-2x-1}+C\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{-2x-1}}=$$

$$=\underbrace{\frac{C}{\sqrt{-2x-1}}}_{\substack{\text{Общее}\\ \text{решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}}+\underbrace{\left(-\frac{1}{6}(-2x-1)-\frac{1}{2}\right)}_{\substack{\text{частное}\\ \text{решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}}=\frac{C}{\sqrt{-2x-1}}+\frac{2x-1-3}{6}=\frac{C}{\sqrt{-2x-1}}+\frac{x-1}{3}, C\in\mathbb{R}.$$

Таким образом, при всех допустимых x общее решение неоднородного уравнения можно записать в виде $y(x)=\frac{C}{\sqrt{|2x+1|}}+\frac{x-1}{3},\ \ C\in\mathbb{R}$.

Ответ: $y(x)=\frac{C}{\sqrt{|2x+1|}}+\frac{x-1}{3},\ \ C\in\mathbb{R}$.

Задача 5. Решить уравнение $y'+y\cos x=\sin 2x$.

Очевидно, что это линейное уравнение, так как оно имеет вид

$$y'+\underbrace{\cos x}_{P(x)}\cdot y=\underbrace{\sin 2x}_{Q(x)}.$$

1) Рассмотрим однородное уравнение $y'+y\cos x=0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$y'=-y\cos x$

$\frac{dy}{dx}=-y\cos x$

$\frac{dy}{y}=-\cos x\,dx$ (потеряно решение $y\equiv 0$)

$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$

$\ln|y|=-\sin x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Потенцируем это уравнение:

$|y|=e^{-\sin x}\cdot e^{C},\ C\in\mathbb{R}$

и с учетом, что $y\equiv 0$ является решением, окончательно получаем, что

$y=Ce^{-\sin x}, C\in\mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y'+y\cos x=\sin 2x$ в виде $y=C(x)e^{-\sin x}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y'+y\cos x=\sin 2x$.

Так как в этом случае $y'=C'^{e^{-\sin x}}-C\cos x\,e^{-\sin x}$, то при подстановке в уравнение получаем

$C'e^{-\sin x} - C\cos x\, e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}\cos x \equiv \sin 2x \Longrightarrow C'e^{-\sin x} \equiv \sin 2x$ – уравнение с разделяющимися переменными относительно $C(x)$.

$$\frac{dC}{dx} = \sin 2x\, e^{\sin x} \Longrightarrow \int dC = 2\int \sin x \cos x\, e^{\sin x} dx = 2\int \sin x\, e^{\sin x} d\sin x =$$
$$= \|\sin x = t\| = 2\int te^t dt = 2\int tde^t = 2te^t - 2\int e^t dt = 2te^t - 2e^t + C =$$
$$= 2\sin x\, e^{\sin x} - 2e^{\sin x} + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow C(x) = 2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x} \Rightarrow y(x) = \left(2(\sin x - 1)e^{\sin x} + C\right) \cdot e^{-\sin x} =$$
$$= \underbrace{Ce^{-\sin x}}_{\substack{\text{Общее} \\ \text{решение} \\ \text{однородного} \\ \text{уравнения}}} + \underbrace{2(\sin x - 1)}_{\substack{\text{частное} \\ \text{решение} \\ \text{неоднородного} \\ \text{уравнения}}},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Как всегда, полезно (особенно для начинающих) убедиться в том, что $y(x) = 2(\sin x - 1)$ является частным решением уравнения $y' + y\cos x = \sin 2x$.

Ответ: $y(x) = Ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1),\ C \in \mathbb{R}\,.$

Задача 6. Решить уравнение $xy' + y = \ln x + 1$.

Очевидно, что это линейное уравнение, так как его можно переписать в виде $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P(x)} \cdot y = \underbrace{\frac{\ln x + 1}{x}}_{Q(x)}$.

1) Рассмотрим однородное уравнение $xy' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$xy' = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx \quad \text{(потеряно решение } y \equiv 0\text{)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Потенцируем это уравнение и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем

$y = \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $xy' + y = \ln x + 1$ в виде $y = \frac{C(x)}{x}$.

Подставим эту функцию в уравнение $xy' + y = \ln x + 1$.

Так как в этом случае $y' = \frac{C'x - C}{x^2} = \frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}$, то при подстановке в уравнение получаем

$x\left(\frac{C'}{x} - \frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} \equiv \ln x + 1 \Rightarrow C' \equiv \ln x + 1$ – простейшее дифференциальное уравнение относительно $C(x)$.

$C(x) = \int(\ln x + 1)dx = (\ln x + 1) \cdot x - \int xd(\ln x + 1) =$
$= \ln x \cdot x + x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot x + x - x + C = x \ln x + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$C(x) = x \ln x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow y(x) = \frac{x \ln x + C}{x} = \underbrace{\frac{C}{x}}_{\substack{\text{Общее}\\ \text{решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{\ln x}_{\substack{\text{частное}\\ \text{решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}},\ C \in \mathbb{R}.$$

Замечание. Всегда полезно до решения задачи внимательно посмотреть на уравнение. Очевидно, что $y(x) = \ln x$ является решением исходного уравнения $xy' + y = \ln x + 1$. Поэтому частное решение можно было не искать с помощью вариации постоянной (кстати, его и не всегда можно найти с помощью вариации постоянной, так как при этом могут возникнуть очень непростые интегралы), а увидеть «методом пристального взгляда». При этом общее решение однородного уравнения, конечно, придется искать, решая уравнение с разделяющимися переменными.

Ответ: $y(x) = \ln x + \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}$.

Задача 7. Решить уравнение $y' + xy = 1 + x^2$.

Очевидно, что это линейное уравнение.

1) Рассмотрим однородное уравнение $y' + xy = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$y' = -xy$

$\frac{dy}{dx} = -xy$

$\frac{dy}{y} = -xdx$ (потеряно решение $y \equiv 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int xdx$

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

Потенцируем это уравнение и с учетом, что $y \equiv 0$ является решением, окончательно получаем

$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, C \in \mathbb{R}$ – общее решение однородного уравнения.

2) Проделаем вариацию постоянной. Будем искать общее решение уравнения $y' + xy = 1 + x^2$ в виде $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Подставим эту функцию в уравнение $y' + xy = 1 + x^2$.

Так как в этом случае $y' = C'e^{-\frac{x^2}{2}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}}$, то при подстановке в уравнение получаем

$$C'e^{-\frac{x^2}{2}} - Cxe^{-\frac{x^2}{2}} + xC(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \equiv 1 + x^2 \Longrightarrow C' \equiv (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Как же нам теперь взять интеграл $\int (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx$?

Прежде чем браться за эту работу, давайте внимательно посмотрим на исходное дифференциальное уравнение $y' + xy = 1 + x^2$. Легко видеть, что функция $y(x) = x$ является частным решением этого уравнения, а поэтому общее решение исходного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y(x) = \underbrace{Ce^{-\frac{x^2}{2}}}_{\substack{\text{Общее}\\ \text{решение}\\ \text{однородного}\\ \text{уравнения}}} + \underbrace{x}_{\substack{\text{частное}\\ \text{решение}\\ \text{неоднородного}\\ \text{уравнения}}},\ C \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $y(x) = x + Ce^{-\frac{x^2}{2}},\ C \in \mathbb{R}$.

Замечание. Из этой задачи видно, что с помощью уже найденного решения уравнения можно получить и значение вызвавшего у нас затруднения интеграла. Получается, что $\int (1 + x^2)e^{\frac{x^2}{2}}dx = xe^{\frac{x^2}{2}} + C,\ C \in \mathbb{R}$.