

Билет 25. Разложения функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\mu$

Применим доказанные формулы Тейлора к функциям, перечисленным выше.

1) Так как $(e^x)' = e^x$, для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$(e^x)^{(k)} = e^x$$

Следовательно, все эти производные равны 1 при $x = 0$.

Поэтому $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, где ξ – некоторая точка между 0 и x . Другая запись для точки ξ : $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. Это – разложение e^x с остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для e^x принимает вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0.$$

2) Перейдём к функциям $\sin x, \cos x$:

$(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x$,
 $(\sin x)'''' = (-\cos x)' = \sin x$ и т.д.

Эти равенства означают, что $(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n+4k)}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому имеет место формула $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, которую легко проверить для $n = 0, 1, 2, 3$, а для остальных n она верна ввиду установленного равенства $(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(n+4k)}$.

Поэтому при $x = 0$ имеем:

производная порядка $4k$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k}{2}\right) = 0$;

производная порядка $4k + 1$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k + \pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$;

производная порядка $4k + 2$ равна $\sin\left(0 + \frac{4\pi k + 2\pi}{2}\right) = 0$;

производная порядка $4k + 3$ равна $\sin\left(\frac{4\pi k + 3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3},$$

где ξ лежит между 0 и x .

Здесь – небольшая хитрость. Мы разложили функцию до членов степени

$2n + 2$, что позволило сделать погрешность меньшей. Конечно, член $0 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}$

выписывать не надо, он равен 0, а здесь он был помещён только для

разъяснения вышеупомянутой «хитрости». Итак

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + 0 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!} + \frac{\sin\left(\xi + \frac{2n+3}{2}\pi\right)}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$$

Аналогично, $(\cos x)^n = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ и

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos\left(\xi + \frac{2n+2}{2}\pi\right) x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Разложения для $\sin x$ и $\cos x$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеют вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

3) Перейдём к функции $\ln(1 + x)$. Её последовательные производные равны:

$$(\ln(1 + x))' = \frac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1},$$

$$(\ln(1 + x))'' = ((1 + x)^{-1})' = -(1 + x)^{-2} \text{ и т.д.}$$

$$(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

Вычисленная при $x = 0$, производная порядка k равна $(-1)^{k-1}(k-1)!$

Поэтому

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}(1+\xi)^{-n-1},$$

где ξ – некоторая точка между 0 и x .

Разложение с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \bar{o}(x^n)$$

4) Наконец, вычислим последовательные производные функции $(1+x)^\mu$:

$$((1+x)^\mu)' = \mu(1+x)^{\mu-1}, ((1+x)^\mu)'' = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}, ((1+x)^\mu)^{(k)} = \mu(\mu-1)K(1+x)^{\mu-k}.$$

Вычисленная в точке $x = 0$, производная порядка k равна $\mu(\mu-1)K(\mu-k+1)$.

Поэтому формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид:

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + K + \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n+1)}{n!}x^n + \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\mu-n-1}x^{n+1},$$

где ξ - между 0 и x . Это так называемое *биномиальное разложение* с остаточным членом в форме Лагранжа. Та же формула с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + K + \frac{\mu(\mu-1)K(\mu-n+1)}{n!}x^n + \bar{o}(x^n), x \rightarrow 0,$$

В качестве примера применения формулы Тейлора рассмотрим задачу нахождения $\sqrt[10]{1000}$ с точностью до 0,001.

Сначала подготовим ее к применению формулы Тейлора. Для этого, зная, что $2^{10} = 1024$, перепишем вычисляемую величину в виде

$$2^{10} \sqrt{\frac{1000}{1024}} = 2^{10} \sqrt{1 - \frac{24}{1024}} = 2 \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{1/10}.$$

Используем биномиальное разложение при $\mu = \frac{1}{10}, x = -\frac{3}{128}$

Число n членов разложения выберем, исходя из заданной точности. Для этого найдем n такое, чтобы:

$$\left| \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1\right) K \left(\frac{1}{10} - n\right)}{(n+1)!} (1 + \xi)^{\frac{1}{10} - n - 1} \left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1} \right| < 0,0005 \quad (1)$$

(тогда при умножении на стоящий впереди коэффициент 2 получаем требуемую точность 0,001).

Очевидно, что:

$$\left| \frac{\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1\right) K \left(\frac{1}{10} - n\right)}{(n+1)!} \right| < \frac{1}{10} \frac{1}{n+1}$$

Далее, ξ – между 0 и $-\frac{3}{128}$, поэтому $\frac{125}{128} < 1 + \xi < 1$ и $\left(\frac{128}{125}\right)^{n+1} > \left(\frac{128}{125}\right)^{n+1 - \frac{1}{10}} > (1 + \xi)^{\frac{1}{10} - n - 1} > 1$, поэтому

$$\left| (1 + \xi)^{\frac{1}{10} - n - 1} \left(-\frac{3}{128}\right)^{n+1} \right| < \left| \left(\frac{128}{125} \frac{3}{128}\right)^{n+1} \right| = \left(\frac{3}{125}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{40}\right)^{n+1}$$

Итак, абсолютная величина левой части неравенства (1) не больше, чем

$$\frac{1}{10} \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{(40)^{n+1}} \quad (2)$$

Поэтому если число (2) окажется меньше, чем 0,0005, то и остаточный член формулы будет меньше 0,0005 и требуемая точность будет достигнута.

Сразу ясно, что при $n = 1$

$$\text{Число } \frac{1}{10} \frac{1}{2} \frac{1}{40^2} = \frac{1}{32000} < 0,0005.$$

Поэтому требуемую точность для приближенной величины даёт приближённая формула:

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2 + \frac{2}{10} \left(-\frac{3}{128} \right) = 2 - \frac{3}{640}.$$