Билет 24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Теорема 24.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (G.Peano)). ***Пусть в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x), \dots f^{(n-1)}(x)$. Пусть $f^{(n)}(x)$ существует в $U(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.***

Тогда $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \bar{\bar{o}}((\Delta x)^n)$ ***при*** $\Delta x \to 0$ (1)

Доказательство. Используем предыдущую теорему, в которой число n заменим числом $n-1$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(\Delta x)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)\Delta x^n}{n!},$$

где ξ – между x_0 и x. (2)

При $\Delta x \to 0$ как x, так и заключённое между x_0 и x число ε стремятся к x_0. Ввиду непрерывности $f^{(n)}$ в точке x_0, $f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. при $\Delta x \to 0$.

Подставляя в (2), получаем:

$$\Delta f(x_0) = f'^{(x_0)}\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(\Delta x)^n,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, откуда сразу следует заключение теоремы.

Замечания:

- Вместо формул (7) и (8) предыдущего параграфа имеем, соответственно, $\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2} + \dots + \frac{d^n f(x)}{n!} + \bar{\bar{o}}((\Delta x)^n)$ при $\Delta x \to 0$ $\Delta x \to 0$. И

$$\Delta f(0) = f'^{(0)} + \frac{f''(0)}{2} + \dots + \frac{d^n f(0)}{n!} + o(x^n), x \to 0$$

- Утверждение теоремы останется справедливым, если предположить, что в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существуют и непрерывны $f(x)$ ... $f^{(n-1)}$ и что существует $f^{(n)}\,(x_0)$.

На экзамене это доказывать не требуется, однако ниже приведено доказательство этого утверждения – для тех, кому это интересно.

Доказать его легче всего, используя правило Лопиталя (вопрос 28).

<u>**Теорема 24.2. +26.5**</u>. ***Пусть в окрестности $\boldsymbol{U(x_0)}$ точки $\boldsymbol{x_0}$ существуют и непрерывны $\boldsymbol{f(x), \dots, f^{(n-1)}(x)}$ и пусть существует $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0)}$. Тогда***

$$\boldsymbol{\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}\,(x_0)}{n!}\,\Delta x^n + \bar{\bar{o}}((\Delta x)^n)}\ \textit{при}\ \boldsymbol{\Delta x \to 0.}$$

Доказательство. Обозначим $T_n(x) = f'(x_0)\Delta x + \dots + \frac{f^{(n)}\,(x_0)}{n!}\Delta x^n$, $\Delta x = x - x_0$, $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ и рассмотрим отношение $\alpha(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. По правилу Лопиталя (теореме 26.1), применённому $n-1$ раз, имеем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n\,(x)}{(x-x_0)^n} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{R'_n\,(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \ \dots$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}\,(x)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}\,(x) - T_n^{(n-1)}\,(x)}{(x-x_0)^n}$$

Из определения $T_n(x)$ следует, что $T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}\,(x)}{((x-x_0)^n)^{(n-1)}} = \frac{1}{n!}\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}\,(x)-f^{(n-1)}\,(x_0)}{x-x_0} - f^{(n-1)}(x_0)\right) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0$

Это означает, что $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \alpha(x)(\Delta x)^n = \bar{\bar{o}}((\Delta x)^n), \Delta x \to 0$, что и требовалось доказать.