<u>Билет 21: Теоремы Ферма, Ролля. Необходимые условия экстремума</u>

Пусть $\mathring{U}(a)$ - некоторая проколотая окрестность точки a.

<u>Определение 21.1</u>: Точка a– ***точка локального максимума*** $f(x)$, если для всех $x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) < f(a)$.Если для всех $x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$, то говорят о точке ***нестрогого максимума***.

Аналогичным образом определяются точки ***локального минимума*** и ***нестрогого локального минимума***. Следует только заменить входящие в определение неравенства неравенствами $f(x) > f(a)$ и $f(x) \geq f(a)$, соответственно.

Обобщающие названия для точек максимума и минимума – ***точки экстремума.***

<u>Теорема 21.1(П. Ферма):</u> ***Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ определена в окрестности точки $\boldsymbol{a}$, пусть эта точка – точка экстремума (хотя бы нестрогого) для функции $\boldsymbol{f(x)}$ и пусть существует производная $\boldsymbol{f'(a)}$ Тогда $\boldsymbol{f'(a) = 0}$***

Доказательство. Рассмотрим, для определенности, случай точки максимума. Тогда для всех $x \in \mathring{U}(a)$ выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ или $f(x) - f(a) < 0$. Если $x \in \mathring{U}(a)$ и $x < a$, то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

По условию существует производная $f'(a)$. Значит, существует $f'_{\text{лев}}(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. По теореме о предельном переходе в неравенствах, $f'_{\text{лев}}(a) \geq 0$.

Аналогично, при $x \in \mathring{U}(a), x > a$ выполняется неравенство $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0.$, поэтому $f'_{\text{прав}}(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le 0$. Так как, $f'(a) = f'_{\text{лев}}(a) = f'_{\text{прав}}(a)$, должны выполняться неравенства $\begin{cases} f'(a) \ge 0 \\ f'(a) \le 0 \end{cases}$, из которых следует доказываемое равенство $f'(a) = 0$.

<u>Примечание 1</u>. В точке экстремума производная может не существовать. Примером служит функция $y = |x|$. Она имеет минимум в точке $\mathrm{x} = 0$. Однако $f'_{\text{лев}}(0) = -1, f'_{\text{прав}}(0) = 1$, и $f'(0)$ не существует.

<u>Примечание 2</u>. Теорема Ферма дает необходимое условие экстремума, но не достаточное, т.е. производная функции в точке может равняться нулю, а экстремума в этой точке нет. Пример: $y = x^3$. Эта функция имеет производную $y' = 3x^2$, обращающуюся в ноль при $x = 0$, однако $y = x^3$ возрастает на всей числовой прямой.

Следствие (необходимые условия экстремума). ***Если функция*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***непрерывна на*** (a; $\boldsymbol{b}$)***, то точками локального экстремума могут быть только такие точки*** $\boldsymbol{x_0}$***, в которых производная функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***либо не существует, либо обращается в*** $\mathbf{0}$**.**

<u>Теорема 20.2(М.Ролль).</u>

Пусть

1)$\boldsymbol{f(x) \in C[a;b]}$***;***

2)$\boldsymbol{f(x) \in D(a;b)}$;

3)$\boldsymbol{f(a) = f(b)}$

Тогда существует точка $\boldsymbol{c \in (a;b)}$ ***такая, что*** $\boldsymbol{f'(c) = 0}$**.**

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, она принимает на этом отрезке наибольшее значение М и наименьшее значение m.

Если оказалось, что $m = M$, то это означает, что $m = f(x) = M$ для всех $x \in [a; b]$, т.е. функция $y = f(x)$ - постоянная на $[a; b]$. Поэтому для всех $x \in (a; b)$ имеет место равенство $f'(x) = 0$.

Если же $m \neq M$, т.е. $m < M$, то хотя бы одно из этих значений функция принимает во внутренней точке $[a; b]$.

Действительно, по условию 3) значения $f(a)$ и $f(b)$ равны друг другу и могут оказаться равны не более, чем одному из чисел m, M.

Пусть, например, $\mathrm{M} = f(c)$, где $c \in (a; b)$. Так как М наибольшее значение функции $f(x)$ на всем отрезке $[a; b]$, то оно будет наибольшим и для $x \in \mathring{\mathrm{U}}(c)$ т.е. с – точка локального экстремума.

По условию 2), в этой точке существует производная $f'(c)$. По теореме Ферма, $f'(c) = 0$.

Замечание:

Все условия теоремы Ролля являются существенными. Это означает, что, если не выполняется одно из них, а остальные два выполняются, заключение теоремы может оказаться неверным.

1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1), \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$

Выполнены условия 2) и 3), не выполнено условие 1). Для всех $x \in (0; 1)$ имеем $f'(x) = 1$.

2) $f(x) = |x|, x \in [-1; 1]$

Не выполнено условие 2), условия 1), 3) выполнены. На интервале $(-1;0)$: $f'(x) = -1$; на интервале $(0;1)$: $f'(x) = 1$. В точке $x = 0$ производная не существует, поэтому на $(-1;1)$ нет такой точки, что $f'(x) = 0$

3) $f(x) = x$

Выполнены первые 2 условия, третье на отрезке $[0;1]$ не выполнено. Всюду на $(0;1)$ имеем $f'(x) = 1$

Следствие теоремы 20.2:

Пусть

1) $\boldsymbol{\varphi(z), \varphi'(z), \ldots, \varphi^{(n)}(z) \in C[x_0; x]}$;

2) $\boldsymbol{\varphi^{(n+1)}(z)}$ существует для любой $\boldsymbol{z \in C[x_0; x]}$;

3) $\boldsymbol{\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0, \varphi(x) = 0}$

Тогда существует точка $\boldsymbol{\xi \in (x_0; x)}$ ***такая, что*** $\boldsymbol{\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0}$**.**

Доказательство. Для функции $\varphi(z)$ на отрезке $[x_0; x]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует точка $c_1 \in (x_0; x)$ такая, что $\varphi'(c_1) = 0$.

Рассмотрим функцию $\varphi'(z)$ на отрезке $[x_0; c_1]$. Для нее также выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка c_2, $c_2 \in (x_0; c_1)$, такая что $\varphi''(c_2) = 0$.

Аналогичными рассуждениями получаем, что существуют точки $c_n < c_n - 1 < \cdots < c_2 < c_1$ такие, что $\varphi^{(k)}(c_k) = 0, k = 1, \ldots, n$ Наконец, рассмотрим функцию $\varphi^{(n)}(z)$ на отрезке $[x_0; c_n]$. Она тоже удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.к. $\varphi^{(n+1)}(z) = \left(\varphi^{(n)}(z)\right)'$ существует на $(x_0;\ \lambda)$, значит и на $(x_0; c_n)$. Поэтому, по теореме Ролля, существует точка $\xi \in (x_0; c_n)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Замечание:

Геометрический смысл теоремы Ролля: при ее условиях есть хотя бы одна точка с на интервале $(a; b)$, касательная в которой параллельна оси x.