Билет 15. Ограниченность непрерывной на отрезке функции.

Теорема 15.1(Вейерштрасс).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Предположим, что $y = f(x)$ не ограничена на отрезке $[a, b]$. Это означает, что для любого числа $C > 0$ существует точка $x \in [a, b]$ такая, что $|f(x)| > C$. Последовательно выбирая число $C > 0$ равным числам $1, 2, \dots, n, \dots$, находим соответствующие точки $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ такие, что $|f(x_n)| > n$. Эти точки образуют бесконечную последовательность, а так как все они принадлежат отрезку $[a, b]$, т.е. $a \le x_n \le b$, эта последовательность является ограниченной. Применяем теорему Больцано-Вейерштрасса для последовательностей, согласно которой существует подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n), сходящаяся к некоторому пределу, который будем обозначать c. Так как $a \le x_{n_k} \le b$, по теореме о предельном переходе в неравенствах получаем: $a \le c \le b$, т.е. $c \in [a, b]$ и, следовательно, функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке. Но это означает, что для любой последовательности, в частности, и для последовательности (x_{n_k}), стремящейся к c, последовательность соответствующих значений $(f(x_{n_k}))$ должна стремиться к $f(c)$. Но $|f(x_{n_k})| > n_k > k$, поэтому последовательность $(f(x_{n_k}))$ стремится к ∞. Получено противоречие с предположением о неограниченности $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание: если функция $y = f(x)$ непрерывна на интервале (a, b), то она может быть неограниченной на этом интервале. Например, функция $f(x) = {}^{1}/_{x}$ на интервале (0, 1) непрерывна. Однако для любого числа $C > 0$ имеет место неравенство $C + 1 > 1$, откуда $0 < {}^{1}/_{(C+1)} < 1$ и значение этой функции в точке $x = {}^{1}/_{C+1}$ равно $C + 1 > C$.

Следствие. ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют точная верхняя грань M и точная нижняя грань m множества её значений на отрезке $[a, b]$.***

Достаточно применить к множеству значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ теорему о существовании точных граней ограниченного множества.

<u>Теорема 18.2 (Вейерштрасс).</u>

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существуют такие точки c, d, принадлежащие этому отрезку, что $f(c) = M$, $f(d) = m$.

Докажем часть утверждения теоремы, относящуюся к точной верхней грани M множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Остальная часть доказывается аналогично.

Будем вести доказательство теоремы методом «от противного». Пусть для всех точек x отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Тогда $M - f(x) > 0$ для всех точек x отрезка $[a, b]$ и функция $y = 1/(M - f(x))$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. По теореме **15.1** эта функция ограничена на отрезке $[a, b]$, следовательно, существует число $C > 0$ такое, что для всех точек x отрезка $[a, b]$ выполняются неравенства $0 < \frac{1}{M - f(x)} < C$. Но тогда для всех точек x из отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $M - f(x) > 1/C$, или $M - 1/C > f(x)$. Это означает, что меньшее, чем M, число $M - 1/C$ является верхней гранью множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Значит, M - не точная верхняя грань множества значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание: часто эту теорему формулируют так:

Непрерывная на отрезке функция принимает свои наименьшее и наибольшее значения на этом отрезке.

Следствие. ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого числа μ, удовлетворяющего неравенствам $m \leq \mu \leq M$, существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$.***

По доказанной теореме, существуют такие точки c, d , принадлежащие отрезку $[a, b]$, что $f(c) = M$, $f(d) = m$. Рассмотрим отрезок числовой оси, соединяющий эти точки. Пусть, для определённости, $c < d$. Тогда функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[c, d]$. По следствию теоремы 16.1, для любого μ, удовлетворяющего неравенствам, $m \leq \mu \leq M$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) = \mu$.

Замечание: Доказанные утверждения означают, что непрерывная на отрезке функция принимает на нём все свои значения, от наименьшего до наибольшего. Разумеется, таким свойством могут обладать не только непрерывные функции. Например, функция $y = \begin{cases} x, \text{если } 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 1, \text{если } -1 \leq x < 0 \end{cases}$ принимает все значения от -1 до $+1$, однако имеет разрыв в точке $x = 0$.

Отметим ещё одно важное следствие теоремы 17.2.

<u>Теорема 15.3.</u> ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X (конечном или бесконечном). Тогда множество её значений Y также представляет собой промежуток.***

Требуется доказать, что вместе с любыми двумя точками $y_1, y_2 \in Y$ любая точка $y, y_1 \leq y \leq y_2$, также принадлежит Y. Пусть $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Рассмотрим множество значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ ($[x_1, x_2] \subset X$, т.к. X- промежуток). Оно представляет собой отрезок, в котором содержится отрезок $[y_1, y_2]$. Таким образом, любое число $y, y_1 \leq y \leq y_2$ является значением $y = f(x)$для некоторого $x \in X$.