Билет 12. Непрерывность элементарных функций.

12.1. Непрерывность многочленов.

Так как функция $y = x$ непрерывна в любой точке, по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций, функция $y = x^2$ – непрерывная. Последовательно применяя вышеупомянутую теорему, получаем, что для любого натурального m функция $y = x^m$ – непрерывна. Умножая непрерывные функции $e = x, x^2, x^3, \dots, x^k$ на постоянные числа $c_1, c_2, \dots, c_k$ соответственно, получаем, что $c_1x, c_2x^2, \dots, c_kx^k$ – непрерывные функции. Сложив $c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k$ получаем непрерывную функцию. Итак, многочлен – непрерывная на всей прямой функция.

12.2. Непрерывность рациональной функции.

По определению, ***рациональной функцией*** $R(x)$ называется отношение двух многочленов, $P(x)$ и $Q(x)$, т. е. $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

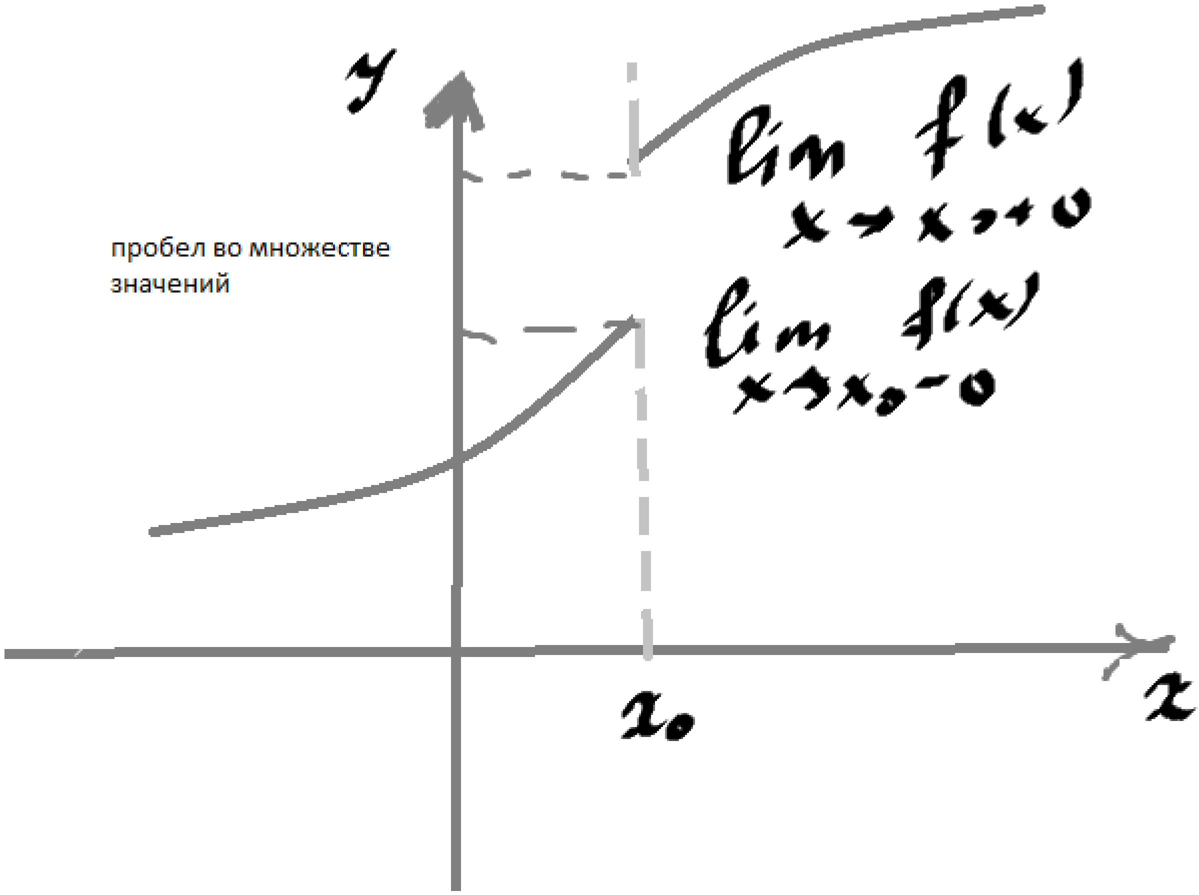
Во всех тех точках x_0, где $Q(x) \neq 0$, функция $R(x)$ непрерывна по теореме о непрерывности частного. Если же в точке x_0 выполняется равенство $Q(x_0) = 0$, то в этой точке может быть устранимый разрыв, как например, в точке $x_0 = 1$ у функции $R(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+4)}{(x-1)(x^2+x+5)}$. Кроме того, в этой точке может оказаться разрыв второго рода, как, например, в точке $x_0 = 0$ у функции $R(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$.

Для дальнейшего исследования будет полезной следующая теорема.

Теорема 12.1. ***Пусть $y = f(x)$ возрастает (или убывает) на промежутке X, причём множество её значений образует промежуток Y. Тогда $f(x)$ – непрерывная на X функция.***

Для **доказательства** вспомним, что если $f(x)$ строго монотонна на промежутке X, то, согласно следствию теоремы Вейерштрасса, в любой внутренней точке x_0 этого промежутка существуют $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Если эти числа равны друг другу, то они, ввиду монотонности, равны $f(x_0)$ и

$f(x) \in C(x_0)$. Если же эти значения не равны друг другу, то во множестве значений Y функции $f(x)$ имеется "пробел" между точками $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, опять же ввиду монотонности $f(x)$. Но, по условию, множество значений Y образует промежуток, в котором не может быть "пробелов" по определению промежутка. Теорема доказана.



12.3. **Непрерывность показательной функции.**

Функция $y = a^x$ монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$) и множеством ее значений при $x \in \mathbb{R}$ является бесконечный промежуток – множество всех положительных чисел. По доказанной теореме, функция $y = a^x$ непрерывна на всей числовой оси.

12.4. **Непрерывность логарифмической функции.**

Функция $\log_a x$ монотонна (возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$) и при $x \in (0, +\infty)$ ее множеств значений есть $\mathbb{R}$. По доказанной теореме, $y = \log_a x$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

12.5. **<u>Непрерывность функции *y*=*x*$^{\mu}$.</u>**

Функция $y = x^{\mu}$ определена при $x > 0$, причем $x^{\mu} = e^{\mu lnx}$. По доказанному, $z = \mu lnx$ - непрерывная функция при $x > 0$, функция $y = e^z$ непрерывна при всех z, поэтому, по теореме о непрерывности сложной функции, $y = x^{\mu}$ - непрерывная при $x > 0$ функция.

12.6. **<u>Функция *y*=sin *x*.</u>**

При вычислении предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x}$ было установлено, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $0 < sinx < x$. Ввиду нечетности функций $y = x$ и $y = sinx$, при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $-x < -sinx < 0$. Из этого сразу следует, что при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $|\sin x| < |x|$. Пусть x_0 произвольная точка. Докажем, что $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Это равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$. В свою очередь, это равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} = 0$. Так как, по доказанному выше, $\left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| < \left|\frac{x - x_0}{2}\right|$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin \frac{x - x_0}{2} = 0$. Кроме того, функция $2\cos\frac{x + x_0}{2}$, очевидно, ограниченная. По свойствам бесконечно малых, получаем требуемое.

12.7. **<u>Функция $\boldsymbol{y = cosx}$.</u>**

Она непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции, так как $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $z = \frac{\pi}{2} - x$ – непрерывная функция и $y = sinz$ – тоже непрерывная функция.

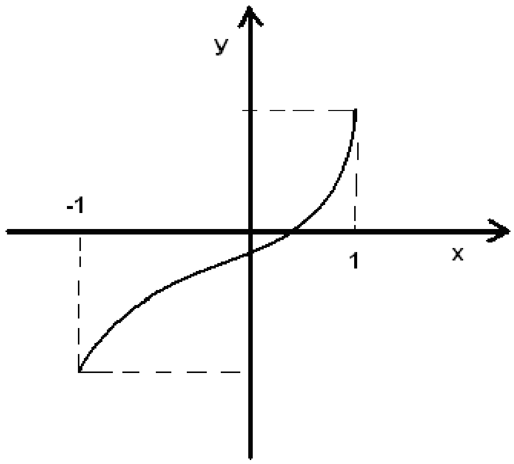
12.8. **<u>Функция $\boldsymbol{y = tgx}$.</u>**

Эта функция непрерывна во всех точках, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in z$. В этих, последних, она имеет разрыв второго рода.

12.9. **Функция $y = ctgx$.**

она непрерывна во всех точках, кроме точек $x = \pi n, n \in z$, где она имеет разрыв второго рода.

12.10. **Непрерывность функции $y = arcsinx$.**

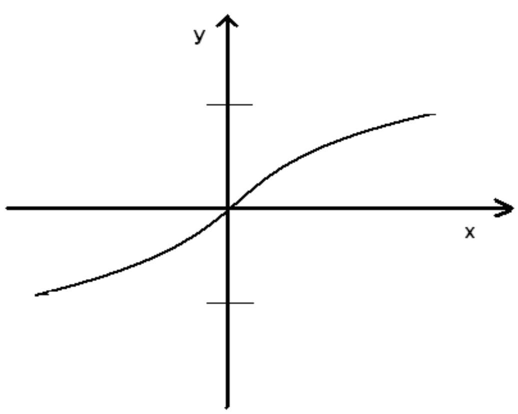


Она определена на отрезке $[-1; 1]$, возрастает на нём и множеством её значений является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. По доказанной теореме 12.1, $y = arcsinx$ непрерывна на $[-1, 1]$.

12.11. **Непрерывность функции *y* = arccos *x*.**

Следует из тождества $arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$, т.е. $arccosx = \frac{\pi}{2} - arcsinx$ - функция, также непрерывная на [-1, 1].

12.12. **Непрерывность функции $y = arctgx$.**



Функция определена и возрастает на всей числовой прямой. Множество значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $y = arctgx$ непрерывна на всей числовой прямой.

12.13. <u>Непрерывность функции $y = arcctgx$.</u>

Следует из равенства: $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$.

Здесь уместно добавить информацию об обратных функциях

12.14. <u>Обратная функция.</u>

Если задана функция $y = f(x)$, обладающая тем свойством, что любое своё значение y она принимает при единственном значении x, то это даёт возможность рассматривать ***обратную функцию*** $x = g(y)$, такую, что равенства $y = f(x)$ и $x = g(y)$ равносильны . Примером служат функции $y = e^x$, $x = \ln y$. Ясно, что обе функциональные зависимости, $y = f(x)$ *и* $x = g(y)$ определяют одну и ту же кривую на плоскости. Часто рассматривают функцию $y = g(x)$ (и именно эту функцию называют обратной). График такой функции получается из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно биссектрисы первого координатного угла.

<u>Теорема 12.2.</u> ***Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ возрастает (убывает) на промежутке X. Тогда на промежутке Y, представляющем собой множество её значений (это будет доказано в теореме 15.3), определена обратная функция $\boldsymbol{x = g(y)}$, которая также возрастает (убывает) и непрерывна.***

Ограничимся случаем возрастания. По определению множества значений функции, для любого $y_0 \in Y$ существует число $x_0 \in X$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. Так как $y = f(x)$ возрастает на X, то для любого $x \in X, x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, а для любого $x \in X$ $x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Поэтому любое своё значение $y_0 \in Y$ функция $y = f(x)$ принимает ровно один раз, в точке $x_0 \in X$, что и позволяет определить функцию $x = g(y)$ такую, что для любого $y_0 \in Y$ выполняется равенство $x_0 = g(y_0)$. Легко видеть, функция $x = g(y)$ возрастает на Y. Действительно, как показано выше, для любого $y_0 \in Y$ значения $y > y_0$ соответствуют значениям $x > x_0$, а значения $y < y_0$ соответствуют значениям $x < x_0$. Но это означает, что и обратно, для любого $x_0 \in X$ значения $x > x_0$ соответствуют значениям $y > y_0$, а значения $x < x_0$ соответствуют значениям $y < y_0$. Наконец, для доказательства непрерывности $x = g(y)$ на промежутке Y воспользуемся теоремой **12.1**. Действительно, функция $x = g(y)$ возрастает на промежутке Y и её множество значений образует промежуток X.