

Билет 11. Непрерывность. точки разрыва. Свойства непрерывных функций.

Определение 11.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Для непрерывности в точке x_0 используется обозначение $f(x) \in C(x_0)$.

Теорема 11.1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0 , то сумма, разность, произведение и, если $f_2(x) \neq 0$, то и частное этих функций - тоже непрерывны в точке x_0 .

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, имеющих пределы.

Теорема 11.2. (Непрерывность сложной функции).

Пусть $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , причем $y_0 = f(x_0)$. Пусть $z = g(y)$ непрерывна в точке y_0 . Тогда сложная функция $g = (f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. То, что $g(y) \in C(y_0)$, означает: $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall y: |y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

То, что $f(x) \in C(x_0)$, означает: $\forall \eta > 0 \exists \delta > 0 \forall x: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta$.

Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно сначала выбрать число $\eta > 0$ так, чтобы из неравенства $|y - y_0| < \eta$ следовало неравенство $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Затем по этому числу $\eta > 0$ найдем число такое, что как только $|x - x_0| < \delta$, так $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. Но тогда и $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Несколько сложнее теорема о пределе сложной функции. На экзамене необязательно!

Теорема 11.3. Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Пусть $g(y)$ определена в проколотой окрестности точки b и $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$.

Пусть, кроме того, выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. $g(y)$ непрерывна в точке y_0 ;

2. Существует такая $\dot{U}(a)$, что $\forall x \in \dot{U}(a) f(x) \neq b$.

Тогда существует $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$ и этот предел равен c .

Доказательство похоже на доказательство предыдущей теоремы.

То, что $\lim_{x \rightarrow b} g(y) = c$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall y: 0 < |y - b| < \eta |g(y) - c| < \varepsilon$.

То, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ означает, что $\forall \eta > 0 \exists \delta > 0 \forall x: 0 < |x - a| < \delta |f(x) - b| < \eta$.

Если потребовать, чтобы в некоторой проколотой $\dot{U}(a)$ окрестности точки a $f(x) \neq b$, то тогда можно по произвольному $\varepsilon > 0$ найти сначала число $\eta > 0$ такое, что если $0 < |y - b| < \eta$, то $|g(y) - c| < \varepsilon$. Теперь по этому η находим $\delta > 0$ так, чтобы из $0 < |x - a| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - b| < \eta$. Пересекаем проколотые окрестности $\dot{U}(a)$ и $\dot{U}_\delta(a)$. Это пересечение содержит некоторую проколотую окрестность точки a , и, если x принадлежит этой окрестности, то $f(x) \neq b$ и $|f(x) - b| < \eta$, т.е. $0 < |f(x) - b| < \eta$, следовательно, $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$. В этом случае теорема доказана. Если же $g(y) \in C(b)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall y: |y - b| < \eta |g(y) - c| < \varepsilon$, поэтому выбирая по $\varepsilon > 0$ соответствующее $\eta > 0$, а потом по этому η – соответствующее число $\delta > 0$ получаем, что как только $0 < |x - a| < \delta$, так $|f(x) - b| < \eta$ и, значит, $|g(f(x)) - c| < \varepsilon$.

Примечание 1: Обычно при вычислении пределов мы используем монотонные замены переменной и условие 2 выполняется.

Примечание 2: Если не выполняется ни одно из условий, то может оказаться, что предел $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x))$ не существует, либо существует, но не равен c .

Первая ситуация встречается в таком примере:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x = \frac{p}{q}, \text{ где } \frac{p}{q} \text{ — несократимая дробь,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

При стремлении x к 0 функция $f(x)$ имеет пределом число 0. При стремлении y к 0 функция $g(y)$ имеет предел, равный 1.

Однако функция $g(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

Пример второй ситуации более простой. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Очевидно, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Пусть $g(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$ Тогда $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$.

Однако $g(f(x)) = \begin{cases} g(0) = 0, & \text{если } x \neq 0, \\ g(1) = 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Поэтому $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 0$.

Определение 11.2. Если функция не является непрерывной в точке x_0 , то говорят, что она разрывна в этой точке.

При этом предполагаем, что либо x_0 является точкой из области определения, либо она является предельной точкой области определения.

Точки разрыва делятся на следующие классы.

Определение 11.3. *Точкой устранимого разрыва* называется такая точка x_0 , что существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, но при этом значение $f(x_0)$ либо не определено, либо $f(x_0) \neq A$. В первом случае можно доопределить функцию в точке x_0 , во втором – переопределить функцию так, чтобы получилась непрерывная функция.

Поясним сказанное примерами:

1. Пусть $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена в точке $x = 0$, но её предел при $x \rightarrow 0$ существует и равен 1 (теорема 9.5).

Поэтому можно доопределить функцию $f(x)$, рассмотрев функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 1, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

По определению, функция $f^*(x)$ – непрерывна в 0.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

Переопределим функцию в точке $x = 0$, положив $f^*(x) = x = 0$.

Получилась непрерывная функция $f^*(x) = x$.

И в том, и в другом примере разрыв удалось устранить.

Определение 11.4. *Точкой разрыва первого рода* называется точка x_0 , в которой существуют $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_2$, причем $A_1 \neq A_2$

Например, функция $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ обладает разрывом в

точке 0 первого рода.

Замечание: По следствию теоремы Вейерштрасса монотонная в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ имеет $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$.

Поэтому она либо непрерывна в точке a , когда оба эти предела равны друг другу, либо имеет в ней разрыв первого рода, когда эти пределы различные.

Определение 11.5. Если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$,
 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ не существует, или бесконечен, то говорят, что x_0 — *точка разрыва*
второго рода.