Билет 8. Предел монотонной ограниченной последовательности, функции

Эта информация относится ко всем вопросам. Ее следует знать, но не следует рассказывать именно в 8 билете. Ниже приводятся определения бесконечных пределов.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M\, \exists \delta > 0\, \forall x{:}\, 0 < |x-a| < \delta\ f(x) > M$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N\, \exists \delta > 0\, \forall x{:}\, 0 < |x-a| < \delta\ f(x) < N$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M\, \exists \delta > 0\, \forall x{:}\, 0 < |x-a| < \delta\ |f(x)| > M$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M\, \exists N\, \forall x < N\ f(x) > M$$

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N\, \exists \delta > 0\, \forall x{:} -\delta < x-a < 0\ f(x) < N$$

Определение 8.1. Последовательность $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется ***неубывающей***, если для всех n выполняется неравенство $a_n \le a_{n+1}$. Она называется ***возрастающей***, если выполняется неравенство $a_n < a_{n+1}$. Последовательность $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ называется ***невозрастающей***, если для всех n выполняется неравенство $a_n \ge a_{n+1}$. Она называется ***убывающей,*** если выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$. Общее название всех таких последовательностей – ***монотонные последовательности***.

Определение 8.1′. Функция $f(x)$, определенная на промежутке $X \subset R$ называется: ***неубывающей (возрастающей)*** на X, если для всех $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \le f(x_2) (f(x_1) < f(x_2))$. Она называется ***невозрастающей (убывающей)*** на *X*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Общее название для этих случаев – *монотонные* на *X* функции.

Теорема 8.1. (К. Вейерштрасс)

1. ***Если последовательность*** $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ ***не убывает и ограничена сверху, то существует*** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. ***Если последовательность*** $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ ***не возрастает и ограничена снизу, то существует*** $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Доказательство. Проведем доказательство первого случая. Второй случай совершенно аналогичен. По условию, множество значений, которые принимает последовательность $\{a_n\}$, ограничено сверху. По теореме **3.1** существует его точная верхняя грань A. Докажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению A, любое меньшее число, в частности число A - ε, уже не является верхней гранью множества значений, принимаемых последовательностью $\{a_n\}$. Значит, при некотором $N \in \mathbb{N}$ выполнено $a_N > A - \varepsilon$, или $A - a_N < \varepsilon$. Кроме того, $A - a_N \geq 0$, т.к. A – верхняя грань множества значений $\{a_n\}$.

Итак, $0 \leq A - a_N < \varepsilon$. Но при $n > N$ имеет место неравенство $a_n \geq a_N$, поэтому $0 \leq A - a_N < \varepsilon_N$, т.е. $|a_n - A| < \varepsilon$. Таким образом, для любого ε существует N такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} a_n = A(= sup_{n\in N}\{a_n\})$.

<u>Теорема 8.2. (К. Вейерштрасс)</u>

1. ***Если*** $f(x)$***не убывает на*** (a,b) ***и ограничена сверху на*** (a,b)***, то существует*** $\lim_{x\to b-0} f(x)$.

2. ***Если*** $f(x)$ ***не убывает на*** (a,b)***и ограничена снизу на*** (a,b)***, то существует*** $\lim_{x\to a+0} f(x)$.

3. ***Если*** $f(x)$ ***не возрастает на*** (a,b) ***и ограничена сверху, то существует*** $\lim_{x\to a+0} f(x)$.

4. ***Если*** $f(x)$ ***не возрастает на*** (a,b)***и ограничена снизу, то существует*** $\lim_{x\to b-0} f(x)$.

Доказательство. Оно вполне аналогично теореме **8.1**. Для полноты изложения докажем, например, случай 2.

Поскольку множество значений, принимаемых $f(x)$ на интервале (a,b) ограничено снизу, существует $inf_{x\in(a,b)} f\{x\} = A$. Докажем, что $A =$

$\lim_{x \to a+0} f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$. По определению точной нижней грани множества, число $A + \varepsilon$ уже не является нижней гранью множества значений $f(x)$на (a, b), поэтому существует такое число c, что $A, = f(c) < A + \varepsilon$. Но тогда для всех $a < x < c$ имеем $a \leq f(x) \leq f(c) < A + \varepsilon$, откуда $|f(x) - A| < \ \varepsilon$. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ найдено число δ (равное числу $c - a$), такое, что для всех x таких, что $a < x < a + \delta (= c)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \ \varepsilon$, т.е. $\lim_{x \to a+0} f(x) = A$.

Следствие. Если $f(x)$ - монотонная на (a, b) функция, то для любого $x_0 \in (a, b)$ существуют $\lim_{x \to x_0+0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0-0} f(x)$.

Доказательство. Достаточно применить теорему **8.2** к интервалам (a, x_0) и (x_0, b).