Билет 6. Свойства бесконечно малых величин. Арифметические свойства предела.

Определение 6.1. Функция $\beta(x)$ называется ***ограниченной*** при $x \to a$, если она ограничена в некоторой $\mathring{U}(a)$, т.е. если $\exists c$: $\forall x \in \mathring{U}(a)\ |\beta(x)| < c$.

Теорема 6.1. (Свойства бесконечно малых величин)

1. ***Если*** $\boldsymbol{\alpha_1(x)}$ ***и*** $\boldsymbol{\alpha_2(x)}$ ***- бесконечно малые функции при*** $\boldsymbol{x \to a}$***, то алгебраическая сумма -*** $\boldsymbol{\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)}$ ***тоже бесконечно малая при*** $\boldsymbol{x \to a}$***;***
2. ***Если*** $\boldsymbol{a(x)}$ ***- бесконечно малая и*** $\boldsymbol{\beta(x)}$ ***- ограниченная при*** $\boldsymbol{x \to a}$ ***функции, то произведение*** $\boldsymbol{a(x) \cdot \beta(x)}$ ***есть бесконечно малая при*** $\boldsymbol{x \to a}$ ***функция.***
3. ***Если*** $\boldsymbol{a_1(x)}$ ***и*** $\boldsymbol{a_2(x)}$ ***- бесконечно малые при*** $\boldsymbol{x \to a}$ ***функции, то произведение*** $\boldsymbol{a_1(x) \cdot a_2(x)}$ ***- тоже бесконечно малая при*** $\boldsymbol{x \to a}$ ***функция.***

Бесконечно малые последовательности обладают вполне аналогичными свойствами:

1. ***Если*** $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ ***и*** $\{\boldsymbol{\beta_n}\}$ ***- бесконечно малые последовательности, то алгебраическая сумма -*** $\{\boldsymbol{\alpha_n}\} \pm \{\boldsymbol{\beta_n}\}$ ***тоже бесконечно малая последовательность;***
2. ***Если*** $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ ***- бесконечно малая последовательность, а*** $\{\boldsymbol{\gamma_n}\}$ ***- ограниченная последовательность (т.е.*** $\exists \boldsymbol{c}$***:*** $\forall \boldsymbol{n}\ |\boldsymbol{\gamma_n}| < \boldsymbol{c}$ ***), то*** $\{\boldsymbol{\alpha_n} \cdot \boldsymbol{\gamma_n}\}$ ***- бесконечно малая последовательность;***
3. ***Если*** $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ ***и*** $\{\boldsymbol{\beta_n}\}$ ***- бесконечно малые последовательности, то произведение*** $\{\boldsymbol{\alpha_n} \cdot \boldsymbol{\beta_n}\}$ ***- бесконечно малая последовательность.***

Доказательство. Доказательство проводим для случая бесконечно малых функций.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, по определению предела, $\exists \delta_1 > O \forall x: 0 < |x - a| < \delta_1\ |a_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists \delta_2 > O \forall x: 0 < |x - a| < \delta_2\ |a_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Обозначив $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, получаем:

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_1, \\ 0 < |x-a| < \delta_2, \end{cases} \Rightarrow |a_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По свойству модулей: $|c+d| \le |c| + |d|$, обозначив $c = a_1(x), d = a_2(x)$ получаем: $|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| \le |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > O\ \exists \delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x-a| < \delta\ |\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| < \varepsilon$, т.е. $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ - бесконечно малая.

2. $\beta(x)$ - ограничена при $x \to a$, т.е. $\exists\ U_{\delta_0}(a), \exists c\colon \forall x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)\ |\beta(x)| < c$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим $\frac{\varepsilon}{c}$. Тогда $\exists \delta_1\ \forall x\colon 0 < |x-a| < \delta_1\ |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$.

Обозначив за $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$ получаем:

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} 0 < |x-a| < \delta_0 \\ 0 < |x-a| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow |a(x)| < \frac{\varepsilon}{c}, |\beta(x)| < c \Rightarrow |a(x) \cdot \beta(x)| < \varepsilon.$$

Значит,$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > o\ \forall x\colon 0 < |x-\alpha| < \delta\ |a(x) \cdot \beta(x)| < \varepsilon$, т.е. $a(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

3. Докажем сначала лемму**.**

__**Лемма 6.1.**__ ***Если $a(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$ функция, то она ограничена при $x \to a$ (наоборот - неверно!).***

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$ и получим, что $\exists \delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x-a| < \delta\ |a(x)| < 1$. Таким образом, при $x \to a$ функция $a(x)$ ограничена. Лемма доказана.

Вернёмся к теореме. По доказанной лемме $a_2(x)$ - ограничена при $x \to a$. Осталось применить свойство 2) бесконечно малых, доказанное выше.

__**Теорема 6.2. (Арифметические свойства предела)**__

Пусть две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеют пределы A_1 и A_2, соответственно, при $x \to a$. Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если $A_2 \ne 0$, частного этих функций равны соответственно сумме, разности, произведению и частному значения этих пределов, т.е.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1, \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \underset{\bullet}{\pm} f_2(x) = A_1 \underset{\bullet}{\pm} A_2}$***, если*** $\boldsymbol{A_2 \neq 0}$***,*** ***то*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}}$***.***

Аналогично теорема верна и для последовательностей. Если $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A}$***, то*** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B}$***, то*** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \underset{\bullet}{\pm} b_n = A \underset{\bullet}{\pm} B}$***, а если*** $\boldsymbol{B \neq 0}$***, то и*** $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}}$

Доказательство. По теореме **5.3** из условия следует, что $f_1(x) = A_1 + a_1(x)$, $f_2(x) = A_2 + a_2(x)$, где $a_1(x), a_2(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$ функции.

Тогда $f_1(x) \pm f_2(x) = A_1 \pm A_2 + \alpha_1(x) \pm \alpha_2(x) = A_1 \pm A_2 + (\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x))$. По теореме **6.1** алгебраическая сумма бесконечно малых $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x) -$ бесконечно малая функция, т.е. $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2$, снова по теореме **5.3**.

Перейдем к произведению $f_1(x) \cdot f_2(x) = \big(A_1 + a_1(x)\big) \cdot \big(A_1 + a_2(x)\big) = A_1A_2 + d_1(k) \cdot A_2 + A_1 \cdot a_2(x) + a_1(x) \cdot a_1(x)$. Последние слагаемые - бесконечно малая величина при $x \to a$. По свойствам 2 и 3 бесконечно малых, - бесконечно малые при $x \to a$. По свойству 1 их сумма – бесконечно малая при $x \to a$. По теореме **5.3,** $\lim\limits_{x\to a}\big(f_1(x) \cdot f_2(x)\big) = A_1A_2$.

Перейдем к пределу частного и докажем сначала лемму**:**

<u>**Лемма 6.1.**</u> ***Если*** $\boldsymbol{A_2 \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{\exists\delta > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta}$***выполняется неравенство*** $\boldsymbol{|f_2(x)| > \frac{|A_2|}{2}}$***.***

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \frac{A_2}{2}$. Тогда $\exists\delta > 0\ \forall x: 0 < |x - a| < \delta |f_2(x) - A_2| < \frac{A_2}{2} \Rightarrow A_2 - \frac{|A_2|}{2} < f_2(x) < A_2 + \frac{|A_2|}{2} \Rightarrow f(x) > \frac{|A_2|}{2}$. Лемма доказана.

Теперь докажем следующее утверждение:

<u>**Лемма 6.2.**</u> ***Если*** $\boldsymbol{A_2 \neq 0}$***, то*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}}$***.***

Доказательство. Имеет место равенство

$$\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{A_2} = \frac{A_2 - f_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)} = \frac{-a_2(x)}{A_2 \cdot f_2(x)}.$$

По лемме **6.1** в $\mathring{U}_\delta(a)$ выполняется неравенство

$$|f_2(x)| \cdot |A_2| > \frac{|A_2|}{2} \cdot |A_2|,$$

следовательно, $\left|\frac{1}{f_2(x) \cdot A_2}\right| < \frac{2}{A_2^2}$. Значит, функция $\frac{1}{f_2(x) \cdot A_2}$ ограничена при $x \to a$, и $\frac{-a_2(x)}{f_2(x) \cdot A_2}$ - бесконечно малая при $x \to a$. Таким образом, $\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$ бесконечно малая, т.е.$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{A_2}$. Лемма доказана.

Для доказательства равенства $\lim\limits_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$ применим лемму **6.2** и часть теоремы **6.2,** относящуюся к пределу произведения функций.