<u>Билет 3. Верхняя и нижняя грани. Стягивающиеся отрезки.</u>

3.1. <u>Верхняя и нижняя грани</u>

<u>Определение 3.1.</u> Множество A ***ограничено сверху***, если существует такое число M, что $\forall a \in A\ a \leq M$. При этом число M называется ***верхней границей*** или гранью множества A. Множество A ***ограничено снизу***, если существует такое число m, что $\forall a \in A\ a \leq M$. При этом число m называется ***нижней границей*** или гранью множества A.

Легко видеть, что если множество A ограничено сверху (снизу), то любое число, большее M (меньшее m) тоже будет его верхней (нижней) границей.

<u>Определение 3.2.</u> Если множество A ограничено сверху, то <u>наименьшая</u> из его верхних граней называется ***точной верхней гранью*** A и обозначается $sup\ A$.

<u>Теорема 3.1.</u> ***Если множество A ограничено сверху, то существует точная верхняя грань этого множества.***

Доказательство. Выберем множество B таким, что $\forall a \in A\ a \leq M$ (т.е. B – это множество всех верхних граней A). Докажем, что множество B имеет наименьший элемент. По аксиоме отделимости (см. билет 4) существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leq c \leq b$. Так как для всех $a \in A$ имеем $a \leq c$, число c является верхней гранью A. Так как для всех $\forall b \in B\ c \leq b$, число c – наименьшее среди элементов множества B. Таким образом, $c = sup\ A$, что и требовалось доказать.

<u>Определение 3.3.</u> Если множество A ограничено снизу, то <u>наибольшая</u> из нижних граней называется ***точной нижней гранью*** A и обозначается $inf\ A$.

<u>Теорема 3.2.</u> ***Если множество A ограничено снизу, то существует точная нижняя грань этого множества.***

Доказательство. Доказательство можно провести двумя способами.

1 способ. По аналогии с теоремой 3.1. рассмотреть множество D нижних граней множества A. Применить аксиому отделимости к D и A. По аксиоме отделимости (см. билет 2) существует такое $d \in \mathbb{R}$, что для всех $b \in D$, для всех $a \in A$ имеет место неравенство $b \le d \le a$. Так как для всех $a \in A$ выполняется неравенство $d \le a$, d является нижней гранью А. Так как для всех $b \in D$ имеем $b \le d$, d – наибольшая среди нижних граней множества А, т.е. $d = inf\ A$.

2 способ. Определим множество $-A$ так: $-A = \{-a, a \in A\}$. Если A ограничено снизу, то $-A$ ограничено сверху, поэтому $\exists\ sup(-A)$, кроме того, $inf\ A = sup(-A)$.

3.2. Стягивающиеся отрезки

Определение 3.4. Система отрезков $\{[a_k, b_k], k \in N\}$ называется ***вложенной***, если $\forall k [a_k, b_k] \supset [a_{k+1}, b_{k+1}]$.

Теорема 3.3. ***Любая вложенная система отрезков имеет хотя бы одну общую для всех отрезков точку, т.е.*** $\exists\ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$: $\forall \boldsymbol{k}\ \boldsymbol{a} \in [\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}]$.***Иными словами,*** $\exists\ \boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}]$ ***или*** $\bigcap_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{b_k}] \ne \emptyset$.

Доказательство. Выберем множества A и B так, что $A = [a_1, a_2, \dots, a_k]$, $B = [b_1, b_2, \dots, ab_k]$. Для того чтобы применить аксиому отделимости, необходимо доказать, что $\forall k, l$ выполняются неравенства $a_k \le b_l$.

Выберем m так, что $m \ge max(k, l)$. Тогда $a_k \le a_m$,$b_m \le b_l$. Значит, $\exists\ c \in R$: $\forall k, l\ \ a_k \le c \le b_l$, полагая $l = k$, получим: $\forall k\ a_k \le c \le b_k$. Таким образом, c - общая для всех отрезков точка. Теорема доказана.

Определение 3.5. Система отрезков$\{[a_n, b_n]$, n $= 1,2,3\dots\}$ называется ***стягивающейся*** системой отрезков, если длины этих отрезков стремятся к 0 при $n \to \infty$, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n > N(\varepsilon)\ b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 3.4. ***Общая точка стягивающейся системы отрезков единственна.***

Доказательство. Допустим, что есть 2 общие точки $c_1 \ne c_2$, $c_1 < c_2$. Тогда $\forall k\ [a_k b_k] \supset [c_1 c_2]$. Возьмем $\varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{2}$. Найдется такое $N(\varepsilon)$, что для любого $n > N(\varepsilon)\ b_n - a_n < \varepsilon$.

Одновременно получаем, что

$$c_2 - c_1 < \frac{c_2 - c_1}{2} \begin{cases} b_n - a_n < \varepsilon \\ [a_n, b_n] \supset [c_1, c_2] \\ \Downarrow \\ b_n - a_n > c_2 - c_1 \end{cases}$$

откуда $\frac{c_2-c_2}{2} < 0$. Но $\varepsilon = \frac{c_2-c_1}{2} > 0$. Тем самым, мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замечания:

- точка с является точной верхней гранью множества левых отрезков и точной нижней гранью множества правых концов этих отрезков;
- вложенная система интервалов может не иметь общую точку, как показывает

Пример. Рассмотрим $(a_n, b_n) = (0, 1/n), n = 1,2, \dots$ У этих интервалов нет общей точки – докажем это от противного. Если бы общая точка α была, то она принадлежала бы первому интервалу, т.е. $\alpha \in (0,\ 1)$, $0 < \alpha < 1$. Выберем число $n \in N$ так, чтобы $\frac{1}{n} < \alpha$, т.е. $n > \frac{1}{\alpha}$. Тогда $\alpha \notin (0, \frac{1}{n})$ вопреки предположению.