Билет 2. Множество действительных чисел. Аксиома отделимости.

Предварительные сведения о натуральных, целых, рациональных числах. На экзамене содержание пунктов 2.1, 2.2, 2.3 следует знать, но можно не рассказывать. (Содержание пункта 1´ можно и не знать**,** сведения об аксиоматике Пеано приведены исключительно для общего развития.)

2.1. **Натуральные числа**

Натуральное число можно также отнести к тем понятиям, которые интуитивно ясны каждому человеку и, разумеется, свойства этих чисел известны из курса средней школы. В этом параграфе мы напомним эти свойства

Сложение натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $a + b = b + a$ (коммутативность, или переместительный закон).

Для натуральных чисел a, b естественно вводится отношение порядка меньше или равно, обозначаемое $\leq$, и для любых чисел a, b выполняется либо соотношение $a \leq b$, либо $b \leq a$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1. Если одновременно $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.
2. Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.
3. Если $a \leq b$, то для всех c выполняется:$a + c \leq b + c$.

Умножение натуральных чисел обладает следующими свойствами:

1. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $ab = ba$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. Если $a \leq b$, то для всех натуральных c выполняется:$ac \leq bc$.
4. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения, или распределительный закон).

Множество натуральных чисел обозначается N.

Мы не будем подробно останавливаться на позиционных системах счисления, как средствах для изображения чисел. В школе, да и в большинстве вычислений, используется привычная десятичная система счисления. Отметим, однако, что в ряде задач более удобны, например, двоичная или троичная системы. Также в качестве примера изобразим число 100 в двоичной системе: 1100100 (так как $100 = 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$).

2.1′. **Аксиомы Пеано**

Более глубокое представление о натуральных числах, даёт предложенная в 1889 году Дж. Пеано система аксиом:

1. Единица – натуральное число. Она обозначается символом 1.
2. Для любого натурального числа n существует единственное натуральное число, за ним следующее. Оно обозначается символом n^*.
3. Единица не является числом, следующим за каким-нибудь натуральным числом.
4. Если число n^*, следующее за натуральным числом n, равно числу m, следующему за натуральным числом m, то $m = n$.
5. Пусть множество A натуральных чисел обладает следующими свойствами: $1 \in A$ и из того, что $n \in A$ следует, что $n^* \in A$. Тогда множество A совпадает с множеством натуральных чисел.

Пятая аксиома является основой метода математической индукции.

С помощью аксиом можно строго определить операцию сложения. Всякой паре a, b натуральных чисел ставится в соответствие третье натуральное число, называемое их суммой и обозначаемое $a + b$, по следующим правилам: $a + 1 = a^*, a + b^* = (a + b)^*$.

С помощью аксиом можно определить также операцию умножения. Всякой паре a, b натуральных чисел ставится в соответствие третье натуральное число, называемое их произведением и обозначаемое $a{\cdot}b$, либо просто ab, по следующим правилам: $a \cdot 1 = a, ab^* = ab + a$.

Для заинтересованного читателя (мы верим, такие есть!) приведём пример доказательства одного из свойств натуральных чисел, например, равенства $a(b + c) = ab + ac$.

По определению умножения, $1(b+c)=b+c=1\cdot b+1\cdot c$. Предположив, что равенство выполнено для чисел a,b,c докажем его для чисел a,b,c^*. Действительно,

$a(b+c^*)=a(b+c)^*=a(b+c)+a=ab+ac+a=ab+(ac+a)=$
$ab+ac^*$

что и требовалось доказать.

2.2. **Целые числа**

Потребности в вычислениях не позволяют ограничиться только натуральными числами. Естественно, дополнить натуральные числа числом 0 и отрицательными числами. Число 0, по определению, обладает следующими свойствами: для любого натурального числа a выполняются равенства
$a+0=a, a\cdot 0=0$.

Нетрудно доказать, что 0 определяется этими свойствами единственным образом. В самом деле, если мы предположим, что есть два элемента, обладающих указанными свойствами, например, 0_1+0_2, то получим, что $0_1=0_1+0_2=0_2$.

Точно также, для произвольного натурального числа a определим противоположное ему число $-a$ как такое, что выполняется равенство
$a+(-a)=0$, т.е. как решение уравнения $x+a=0$. Натуральные числа, им противоположные числа и число 0 образуют новое множество, называемое множеством целых чисел. Множество целых чисел обозначается $\mathbb{Z}$.

Мы не будем подробно останавливаться на том, как операции сложения и умножения и отношение неравенства переносятся с множества натуральных чисел на множество целых чисел, считая это известным, а просто перечислим свойства целых чисел. Сложение целых чисел обладает следующими свойствами:

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $a+b=b+a$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. Существует нейтральный элемент по сложению, называемый 0, такой, что для любого целого числа a выполняются равенства $a+0=a$.

4. Для произвольного целого числа a существует противоположное ему число $-a$ такое, что выполняется равенство $a + (-a) = 0$.

Свойство 4 позволяет определить на множестве целых чисел операцию вычитания с помощью равенства $a - b = a + (-b)$.

С алгебраической точки зрения эти свойства означают, что множество целых чисел с введённой на нём операцией сложения образует коммутативную группу.

Умножение целых чисел обладает следующими свойствами:

1. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность, или сочетательный закон).
2. $ab = ba$ (коммутативность, или переместительный закон).
3. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность умножения относительно сложения, или распределительный закон).
4. Существует нейтральный элемент по умножению такой, что $a \cdot 1 = a$ для любого a.

С алгебраической точки зрения эти свойства означают, что множество целых чисел с введёнными на нём операциями сложения умножения образует кольцо.

Для целых чисел a, b естественно вводится отношение порядка меньше или равно, обозначаемое $\leq$, и для любых чисел a, b либо $a \leq b$, либо $b \leq a$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1. Если одновременно $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.
2. Если $a \leq b$ и $b \leq c$ то $a \leq c$.
3. Если $a \leq b$, то для всех c выполняется: $a + c \leq b + c$.
4. Если $a \leq b$, то для всех натуральных c выполняется: $ac \leq bc$, а для всех отрицательных целых чисел c - противоположное неравенство $ac \geq bc$.

Для целых чисел можно определить понятие делимости. Говорят, что целое число c делится на целое число m без остатка, если существует целое число c такое, что $a = mc$. (Обычно это обозначают следующим образом: $m|a$.) Число a называется делимым, число m – делителем, число c – частным от деления. Если же a не делится на число m без остатка, то его можно единственным образом представить в виде $a = mc + r$, где $1 \leq r \leq m - 1$. Тем самым, мы получили равенство $a = mc + r$, верное при $0 \leq r \leq m - 1$.

Зафиксируем произвольное целое число $m \neq 0$ и назовём два целых числа a, b сравнимыми по модулю m (что обозначается $a \equiv b (\mathrm{mod} m)$), если разность $a - b$ делится на m. Легко видеть, определённое таким образом отношение обладает всеми свойствами отношения эквивалентности. Классы эквивалентности называются классами вычетов по модулю m, в качестве системы представителей можно взять всевозможные остатки от деления на m, т.е. числа $0, 1, \dots, m - 1$. Это множество обозначается $\mathbb{Z}_m$.

Сумму вычетов a и b определяем, как остаток от деления на m числа $a + b$, произведение вычетов a и b определяем, как остаток от деления на m числа ab. Операции над вычетами обладают теми же свойствами, что и операции над целыми числами.

2.3. <u>Рациональные числа</u>

Как отмечено выше, уравнение $ax = b$, где a, b -целые числа имеет целочисленное решение только в том случае, когда число b делится на число a без остатка. Для того, чтобы это уравнение можно было решать при всех a, b с условием $a \neq 0$, следует расширить множество рассматриваемых чисел, введя дроби и, тем самым, образовав множество рациональных чисел.

Это множество состоит из множеств равных дробей (напомним, что дроби $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ называются равными, если $ad = bc$).

Иногда это определение вызывает недоумение. Что же это такое, рациональное число? Всё-таки, это число или множество? Ответ прост – это число, которое можно изобразить с помощью любой из бесконечного множества равных дробей. При этом целые числа, разумеется, тоже являются рациональными, т.к., например, $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \cdots$

Операции над дробями определяются так: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Для операции сложения дробей это определение означает, что мы сначала приводим дроби к общему знаменателю, т.е. заменяем каждую из них равной ей дробью, имеющей знаменатель bd, затем складываем числители получившихся дробей.

Нетрудно проверить, что определение операций корректно, т.е. что если заменить дроби $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ равными им дробями, то их суммой будет дробь, равная $\frac{ad+bc}{bd}$, а произведением – дробь, равная $\frac{ac}{bd}$.

Свойства 1-4 для сложения и свойства 1-4 для умножения, имевшие место для целых чисел, разумеется, сохранятся и для рациональных чисел. Это можно проверить с помощью простых, но громоздких выкладок, которые мы опускаем.

Наконец, для любого отличного от нуля рационального числа a существует единственное, обратное по умножению число a^{-1}, т.е. такое, что $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Оно определяется так: если $a = \frac{p}{q}, p \neq 0, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, то $a^{-1} = \frac{q}{p}$. Операция деления определяется так: для любых рациональных чисел $a, b, b \neq 0$ полагаем $a : b = a^{-1}b$.

С алгебраической точки зрения множество рациональных чисел с ведёнными в нём операциями сложения и умножения образует поле.

На множестве рациональных чисел отношение порядка вводится так. Считаем рациональное число положительным, если его можно представить дробью $a = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}$. Рациональное число $a = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ считаем отрицательным, если число p - отрицательное. По определению $a > b$, если разность $a - b$ - положительное число и $a < b$, если разность $a - b$ - отрицательное число. Из этого определения сразу следует, что положительное число a удовлетворяет неравенству $a > 0$, отрицательное число a удовлетворяет неравенству $a < 0$.

Отношение порядка обладает такими свойствами:

1 Если одновременно $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

2. Если $a \leq b$ и $b \leq c$ то $a \leq c$.

3. Если $a \leq b$, то для всех c выполняется: $a + c \leq b + c$.

4. Если $a \leq b$, то для всех неотрицательных c выполняется: $ac \leq bc$, а для всех отрицательных целых чисел c - противоположное неравенство $ac \geq bc$.

Сформулируем ещё одну важную аксиому – «аксиому Архимеда»:
Для любого числа a существует натуральное число n такое, что выполняется неравенство $a \leq n$.

Из курса средней школы известно, что рациональное число изображается либо конечной, либо бесконечной периодической десятичной дробью. Это представление единственное за исключением тех случаев, когда число можно представить конечной десятичной дробью

2.4. <u>**Действительные числа**</u>

Одной из важнейших задач является задача измерения различных величин.

Рассмотрим подробнее задачу измерения отрезков. Выберем прямую на плоскости, введем на ней точку отсчёта, обозначаемую O, и отрезок единичной длины, то получим, что любому рациональному числу можно сопоставить единственную точку M этой прямой, потребовав, чтобы длина отрезка OM равнялась абсолютной величине этого числа и чтобы точка М лежала справа от точки O для положительного числа и слева от точки O - для отрицательного числа. На первый взгляд кажется, что рациональные точки заполняют собой всю прямую. Однако это вовсе не так. Длина диагонали квадрата со стороной единичной длины не может быть выражена никаким рациональным числом.

Докажем это утверждение, использовав метод от противного. Для этого предположим, что эта длина выражается числом вида ${}^{m}/_{n}$, где натуральные числа m, n не имеют общих делителей, кроме числа 1. Тогда, по теореме Пифагора, $({}^{m}/_{n})^2 = 2, m^2 = 2n^2$. Из последнего равенства следует, что m - чётное число (иначе квадрат этого числа был бы нечётным числом вопреки этому равенству), т.е. $m = 2m_1$. Следовательно, $4m_1^2 = 2n^2, 2m_1^2 = n^2$. Значит, также чётное число. Получено противоречие с предположением, состоящее в том, что оба числа m, n - чётные.

Таким образом, для решения задачи об измерении длин любых отрезков множества рациональных чисел недостаточно. Придётся расширить множество рассматриваемых чисел, дополнив его новыми объектами, иррациональными числами. Нашей целью сейчас будет построение множества $\mathbb{R}$ действительных чисел (также называемых вещественными числами), которое будет объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, причём элементы множества действительных чисел будут находиться во взаимно-однозначном соответствии с точками прямой. Для этого нам потребуется дополнительная аксиома о непрерывности множества действительных чисел. Непрерывность множества $\mathbb{R}$ состоит в том, что в $\mathbb{R}$ нет "пустот". А именно, справедливо следующее утверждение, которое мы примем за аксиому.

2.5. Аксиома отделимости

Для любых двух непустых множеств A и B в $\mathbb{R}$, таких, что для любых $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$, существует хотя бы одно такое число c, что для любых $a \in A, b \in B$ выполнено неравенство $a \leq c \leq b$.

Впервые точный смысл утверждению, что прямая "непрерывна", дал в 1872 году немецкий математик Ю. В. Р. Дедекинд. Отметив, что каждая точка прямой разбивает прямую на две части так, что каждая точка одной части расположена влево от каждой точки другой части прямой, Дедекинд пишет: "Я усматриваю теперь сущность непрерывности в обратном принципе, то есть в следующем: если все точки прямой распадаются на два класса такого рода, что каждая точка первого класса лежит влево от каждой точки второго класса, то существует одна и только одна точка, которая производит это разбиение прямой на два класса". И далее: "… я решительно не в состоянии привести какое бы то ни было доказательство справедливости этого принципа, и никто не в состоянии этого сделать. Принятие этого свойства прямой лишь есть не что иное, как аксиома, посредством которой мы только и признаём за прямой её непрерывность".

Итак, действительные числа представляют собой множество чисел с введёнными в нём операциями сложения, умножения, вычитания и деления, и отношением порядка, обладающими обычными законами (теми же, что для рациональных чисел). Кроме того, в нём справедлива аксиома отделимости.
Как отмечено выше, если ограничиться множеством рациональных чисел, то аксиома отделимости окажется неверна. Если A - множество рациональных чисел, меньших, чем $\sqrt{2}$, а B -множество рациональных чисел больших, чем $\sqrt{2}$, то эти множества отделяет друг от друга именно число $\sqrt{2}$, которое не является рациональным.

Как отмечалось выше, десятичные представления рациональных чисел являются либо конечными, либо бесконечными периодическими десятичными дробями. Естественно, рассмотреть и все остальные, т.е. бесконечные непериодические десятичные дроби, которые представляют иррациональные числа. Таким образом, действительные числа можно представить в виде бесконечных десятичных дробей.

Вернемся к задаче об измерении отрезков. Процесс измерения длины отрезка можно задать следующим алгоритмом. Расположим отрезок так, чтобы его начало совпадало с точкой O, а конец с точкой x. Начнём откладывать от точки O единичный отрезок. Пусть точка x окажется между точками с координатами a_0 и $a_0 + 1$. Разобьём отрезок $[a_0, a_0 + 1]$ на десять равных частей. Точка x либо совпадёт с одной из точек деления, либо окажется между двумя из них. В первом случае процесс измерения закончен, во втором мы снова разобьём отрезок на 10 частей и продолжим аналогично. Если на каком-то шаге точка x совпала с одной из точек деления, то она будет изображена конечной десятичной дробью. В противном случае будет получена бесконечная десятичная дробь. И в том, и в другом случае точке прямой поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь. Задача об измерении отрезка получила своё решение.

Разумеется, выбор числа 10 в качестве основания системы счисления не является единственным, как уже отмечалось в конце первого параграфа, широко используются двоичная, троичная системы счисления. Мы на этом вопросе останавливаться не будем.