

Некоторые основные теоремы

Двойные интегралы и теорема Фубини

Определение 1. Диаметр множества $D \subset \mathbb{R}^2$ называется число $\text{diam}(D)$, удовлетворяющее равенству

$$\text{diam}(D) = \sup_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Определение 2. Множество частей $\{D_i\}_{i=1}^n$ назовем **разбиением** и обозначим T .

Величину $d(T) = \max_{i=1, \dots, n} \text{diam}(D_i)$ назовём **диаметром разбиения**.

Множество точек $\{M\}_{i=1}^n$ назовём **разметкой** разбиения T .

Сумму $\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) |D_i|$ назовём **интегральной суммой**, соответствующей функции f , разбиению T и разметке $\{M\}_{i=1}^n$.

Определение 3. Пусть функция f ограничена на D . Число $I \in \mathbb{R}$ называется **двойным интегралом Римана** функции f по области $D \subset \mathbb{R}^2$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T \forall \{M\}_{i=1}^n : d(T) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T, \{M_i\}) - I| < \varepsilon.$$

Функцию f в этом случае будем называть **интегрируемой** на D . Число I обозначается $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Везде далее считаем функцию f ограниченной.

Определение 4. **Верхней суммой Дарбу**, соответствующей разбиению T и функции f , будем называть сумму $S(T) = \sum_{i=1}^n \sup_{M \in D_i} f(M) |D_i|$, а **нижней суммой Дарбу**, соответствующей разбиению T и функции f , будем называть сумму $s(T) = \sum_{i=1}^n \inf_{M \in D_i} f(M) |D_i|$.

Теорема 1. Критерий интегрируемости. Ограниченная функция f интегрируема на D тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall T : d(T) < \delta \Rightarrow S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Теорема 2. Если функция f ограничена и непрерывна на квадратируемом множестве D , то она интегрируема на этом множестве.

Теорема 3. Свойства двойного интеграла.

1) Линейность. Пусть f_1 и f_2 интегрируемы на множестве D . Тогда для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\iint_D (\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx dy + \beta \iint_D f_2(x, y) dx dy.$$

2) Аддитивность. Пусть f интегрируема на множестве $D = D_1 \cup D_2$, где множества D_1 и D_2 могут пересекаться только по границе и квадратируемы. Тогда

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

3) **Неравенства для интегралов.** Пусть f_1 и f_2 интегрируемы на множестве D и при всех $(x, y) \in D$ выполнено неравенство $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$. Тогда

$$\iint_D f_1(x, y) dx dy \leq \iint_D f_2(x, y) dx dy.$$

4) **Интегрируемость модуля.** Пусть f интегрируема на множестве D . Тогда $|f|$ интегрируема на D и имеет место неравенство

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

5) **Теорема о среднем.** Пусть $f \in C(D)$. Тогда найдётся такое $(x_0, y_0) \in D$, что

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) |D|.$$

Теорема 4. Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на прямоугольнике

$$P = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

и при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Тогда функция J интегрируема на отрезке $[a, b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \iint_P f(x, y) dx dy.$$

Доказательство. Пусть T_P – разбиение прямоугольника P с помощью прямых, параллельных координатным осям, на прямоугольники $P_{j,i}$, причём горизонтальные прямые образуют разбиение T_n отрезка $[c, d]$ точками пересечения

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d,$$

а вертикальные прямые образуют разбиение T_k отрезка $[a, b]$ точками пересечения

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b.$$

Пусть также

$$m_{j,i} = \inf_{P_{j,i}} f(x, y), \quad M_{j,i} = \sup_{P_{j,i}} f(x, y), \quad j = 1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, n.$$

При фиксированном $x = \xi_j$ из свойств интеграла Римана следуют неравенства

$$m_{j,i} \Delta y_i \leq \int_{y_{i-1}}^{y_i} f(\xi_j, y) dy \leq M_{j,i} \Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Тогда, пользуясь аддитивностью интеграла Римана, просуммировав эти неравенства по i от 1 до n , получим

$$\sum_{i=1}^n m_{j,i} \Delta y_i \leq \int_c^d f(\xi_j, y) dy \leq \sum_{i=1}^n M_{j,i} \Delta y_i.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^n m_{j,i} \Delta y_i \leq J(\xi_j) \leq \sum_{i=1}^n M_{j,i} \Delta y_i.$$

Домножим все части этих неравенств на $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ и просуммируем по j от 1 до k :

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n m_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i \leq \sum_{j=1}^k J(\xi_j) \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n M_{j,i} \Delta x_j \Delta y_i.$$

Слева в этих неравенствах стоит нижняя сумма Дарбу $s(T_P)$, а справа – верхняя сумма Дарбу $S(T_P)$, причём в силу интегрируемости f на прямоугольнике P для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только $d(T_P) < \delta$, то сразу же $S(T_P) - s(T_P) < \varepsilon$. При этом если $d(T_P) < \delta$, то сторона каждого прямоугольника $T_{j,i}$ достаточно мала, то есть диаметр разбиения T_k может быть сделан сколь угодно малым. Так как функция J интегрируема на отрезке $[a, b]$ по условию, то её интегральная сумма $\sum_{j=1}^k J(\xi_j) \Delta x_j$ и интеграл $\iint_P f(x, y) dx dy$ отличаются друг от друга менее, чем на ε при любой разметке разбиения T_k . Тогда при $d(T_P) \rightarrow 0$ получаем равенство

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b J(x) dx = \iint_P f(x, y) dx dy.$$

□

Теорема 5. Теорема Фубини. Пусть функции φ_1 и φ_2 непрерывны на отрезке $[a, b]$, причём при всех $x \in [a, b]$ выполнено неравенство $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. Пусть на множестве

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$$

функция f интегрируема, а также при каждом $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Тогда функция J интегрируема на отрезке $[a, b]$ и выполняется равенство

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Доказательство. Так как функции φ_1 и φ_2 непрерывны на отрезке $[a, b]$, то существуют такие $x_1, x_2 \in [a, b]$, что

$$c = \varphi_1(x_1) = \min_{[a, b]} \varphi_1(x), \quad d = \varphi_2(x_2) = \max_{[a, b]} \varphi_2(x).$$

Тогда множество D целиком содержится в прямоугольнике (см. рисунок)

$$P = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}.$$

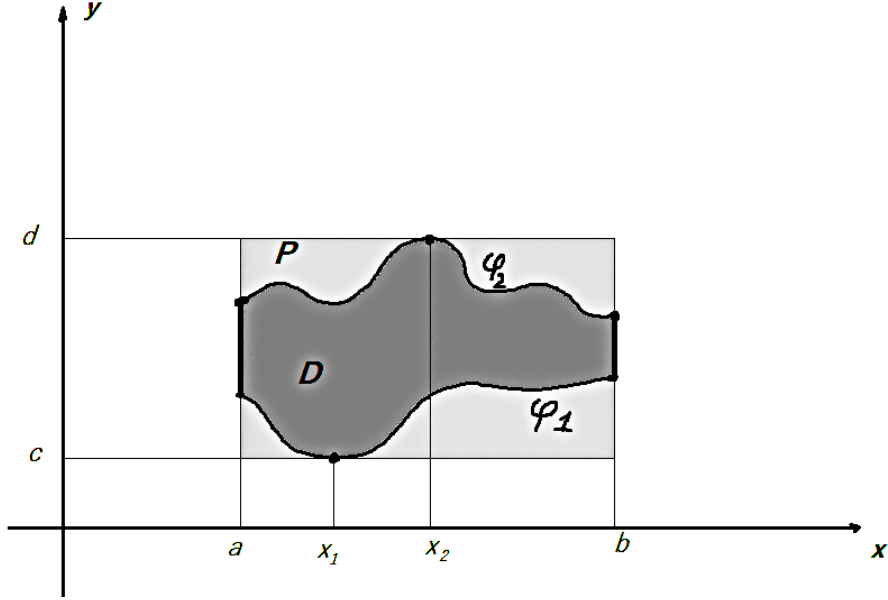


Рис. 1: Множество D вписано в прямоугольник C .

Введём вспомогательную функцию f_0 , задаваемую следующим образом:

$$f_0(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Тогда функция f_0 интегрируема в прямоугольнике D , причём в силу аддитивности двойного интеграла

$$\iint_P f_0(x, y) dx dy = \iint_D f_0(x, y) dx dy + \iint_{P \setminus D} f_0(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

При этом для любого $x \in [a, b]$ в силу аддитивности интеграла Римана

$$\int_c^d f_0(x, y) dy = \int_c^{\varphi_1(x)} f_0(x, y) dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f_0(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d f_0(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Таким образом, применяя к функции f_0 на прямоугольнике P предыдущую теорему, получаем цепочку равенств:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_P f_0(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_0(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

□

Рассмотрим, наконец, более общее квадрируемое множество D , содержащееся в некотором прямоугольнике $P = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$. Пусть снова f интегрируема на D и f_0 совпадает с f на D и равна нулю на $P \setminus D$. Пусть

$$E(x) = \{y : (x, y) \in D\}.$$

Предположим, что $E(x) = \bigcup_{i=1}^n [\varphi_i(x), \psi_i(x)]$. Тогда, как и в теореме Фубини,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_P f_0(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f_0(x, y) dy = \sum_{i=1}^n \int_a^b dx \int_{\varphi_i(x)}^{\psi_i(x)} f(x, y) dy.$$

Таким образом, можно обобщить теорему Фубини и на более сложные множества, чем криволинейная трапеция D из этой теоремы.

Формула Грина и её применения

Под промежутком мы будем понимать отрезок, полуинтервал, интервал, луч и всю прямую. Чаще всего в роли промежутка будет выступать отрезок.

Непрерывное отображение промежутка I в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ называется *кривой*, соответственно, в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$. Мы для краткости ограничимся случаем пространства, так как к плоскости перейти совсем просто, полагая $z = 0$ на I . Другими словами, кривой в пространстве называется множество точек

$$L = \{(x, y, z) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I, x, y, z \in C(I)\}.$$

Набор функций $x(t), y(t), z(t)$ называется параметризацией кривой L . Мы будем рассматривать кривые, лишь конечное число точек которых имеет более одного прообраза, а также будем считать, что прообраз каждой точки кривой – конечное множество. Точка кривой, имеющая более одного прообраза, называется *точкой самопересечения или кратной точкой* кривой.

Пусть $I = [a, b]$. Точки A и B кривой L с координатами

$$A(x(a), y(a), z(a)), B(x(b), y(b), z(b))$$

называются *граничными точками кривой*, а точки, не являющиеся граничными, называются внутренними. Если A и B совпадают, то кривая L называется *замкнутой*, а если других кратных точек, кроме концов, у кривой нет, то она называется *простой замкнутой*. Кривая без кратных точек называется *простой*. Незамкнутая кривая называется *ориентированной*, если указано, какая из её точек является началом кривой, а какая – концом. Кривую с началом в A и концом в B называют ещё *путём* из A в B . Кривую L с началом A и концом B часто будем обозначать просто AB (когда из контекста понятно, что речь идёт именно о кривой). Кривую с началом B и концом A будем обозначать BA . *Гладкой* будем называть кривую, для которой функции x, y, z , задающие параметризацию, являются непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$, а касательный вектор $\bar{s} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ этой кривой не является нулевым ни в одной её точке. Таким образом, *гладкая кривая имеет касательную в каждой своей внутренней точке*. Кривая L является кусочно-гладкой, если касательный вектор отсутствует не более чем в конечном числе внутренних точек L .

Замкнутую кривую, которая не имеет самопересечений, будем называть *контуром*. Пусть контур лежит в плоскости Oxy и является границей области D . Тогда говорят, что *контур ориентирован положительно, если при обходе по нему область D остаётся слева*.

Можно и по-другому дать определение положительного направления обхода кусочно-гладкого контура L , являющегося границей выпуклого множества D на плоскости Oxy . В

каждой точке кривой L (кроме, быть может, конечного числа) построим касательный вектор $\bar{s}$ и внешнюю нормаль $\bar{n}$ к кривой L . Если векторное произведение $[\bar{n}, \bar{s}]$ сонаправлено с положительным направлением оси Oz , то вектор $\bar{s}$ указывает положительное направление обхода.

Теорема 6. Формула Грина. Пусть выпуклое (то есть вместе с любыми двумя своими точками содержащее и отрезок прямой, соединяющей эти точки) квадрируемое множество D ограничено замкнутой кусочно-гладкой кривой L , а функции P и Q , а также Q'_x и P'_y непрерывны в D , включая границу. Тогда

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Доказательство. Докажем равенство

$$\oint_L Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Спроецируем множество D на ось Ox . Проекцией будет являться некоторый отрезок $[a, b]$. Проведём вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$. Граница множества D будет состоять из четырёх кривых: отрезков L_1 и L_3 прямых $x = a$ и $x = b$ (возможно, какой-то из этих отрезков будет состоять из одной точки) и кривых L_2 и L_4 , каждая из которых лежит в полосе между прямыми $x = a$ и $x = b$. Интегралы $\int_{L_1} Pdx$ и $\int_{L_3} Pdx$ равны нулю, так как $da = db = 0$, а кривые L_2 и L_4 представляют собой функции, которые обозначим φ_1 и φ_2 , причём для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$.

Тогда, используя теорему Фубини и теорему о связи криволинейного интеграла второго рода с интегралом Римана, получим:

$$- \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))) dx = \int_{L_2 \cup L_4} Pdx.$$

Формула

$$\oint_L Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$

доказывается также. Складывая две эти формулы, получаем утверждение теоремы. $\square$

Пример 1. Условие непрерывности функций P и Q вместе с их частными производными важно. Действительно, рассмотрим $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$. Тогда

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2 - 2y \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Тогда если мы возьмём любое выпуклое квадрируемое множество D , не содержащее точку $O(0, 0)$ и ограниченное кусочно-гладким контуром L (причём $O \notin L$), то по формуле Грина

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 dxdy = 0.$$

Если же $O(0, 0) \in D$, то формулу Грина применить нельзя (почему?). Считая по-прежнему, что $O \notin L$, покажем, как найти $\oint_L Pdx + Qdy$. Рассмотрим окружность

$\gamma : x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, радиус которой настолько мал, что она лежит в D и не имеет общих точек с контуром L . Выберем точку A на окружности и точку B на контуре L так, чтобы их можно было соединить отрезком прямой, не имеющим других общих точек с окружностью и контуром (см. рисунок). Рассмотрим кусочно-гладкий контур L' с на-

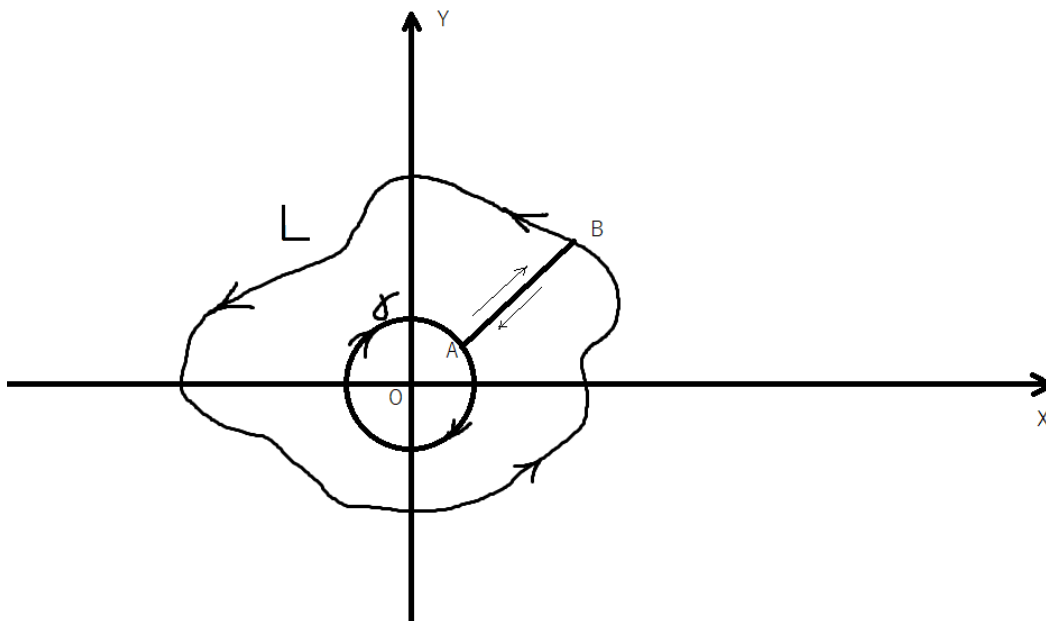


Рис. 2: Сложный замкнутый контур.

чалом и концом в точке A , который устроен следующим образом: берётся отрезок AB , проходимый в направлении от A к B , затем против часовой стрелки проходится контур L , после чего снова проходится отрезок AB в направлении от B к A , а затем по часовой стрелке обходится окружность γ (так как обход происходит по часовой стрелке то будем означать соответствующий интеграл $\oint_{-\gamma}$, а интеграл $\oint_{\gamma}$ будет означать криволинейный интеграл по окружности, проходимой против часовой стрелки). Контур L' ограничивает односвязную (см. определение ниже) область D' , в которой можно применить формулу Грина. Таким образом,

$$\oint_{L'} Pdx + Qdy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_{D'} 0 dxdy = 0.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \oint_{L'} Pdx + Qdy &= \int_{AB} Pdx + Qdy + \oint_L Pdx + Qdy + \int_{BA} Pdx + Qdy + \oint_{-\gamma} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{AB} Pdx + Qdy + \oint_L Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy - \oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \oint_L Pdx + Qdy - \oint_{\gamma} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

откуда $\oint_L Pdx + Qdy = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy$. Таким образом, интеграл по любому замкнутому контуру L , не проходящему через начало координат и ограничивающему область D , которая содержит начало координат, равен интегралу по любой окружности с центром в начале координат, содержащейся в D и не пересекающей L (отсюда, кстати, следует, что интегралы по любым двум таким контурам равны друг другу). В таком случае,

параметризовав окружность $\gamma: x = \varepsilon \cos t, y = \varepsilon \sin t, t \in [0, 2\pi]$, получим

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \oint_{\gamma} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin t d \cos t - \varepsilon^2 \cos t d \sin t}{\varepsilon^2} = - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = -2\pi.$$

Рассуждать можно было и по-другому, но снова с помощью формулы Грина. В области D проведём контур L'' , не проходящий через начало координат и не пересекающийся с L . Два этих контура ограничивают область D'' , граница которой состоит из контура L , проходимого против часовой стрелки и контура L'' , проходимого по часовой стрелке (см. рисунок). Такие направления обходов контуров выбираются, чтобы, область оста-

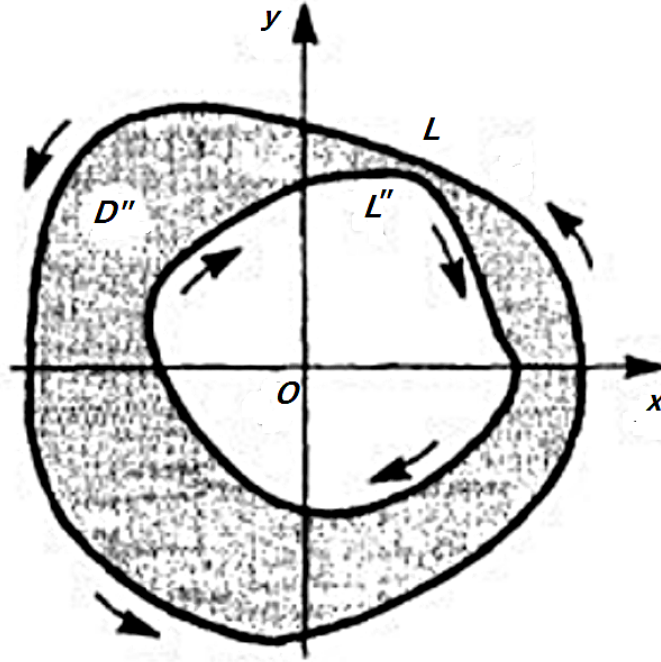


Рис. 3: В D'' применима формула Грина.

валась слева. По формуле Грина имеем

$$\oint_{L \cup L''} Pdx + Qdy = \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D 0 dxdy = 0,$$

что в силу аддитивности криволинейного интеграла равносильно

$$\oint_L Pdx + Qdy - \oint_{L''} Pdx + Qdy = 0,$$

то есть интегралы по любым двум замкнутым контурам совпадают.

Таким образом, мы видим, что условие непрерывности частных производных P'_y и Q'_x на всем множестве D важно.

Как мы знаем, площадь квадратуемого множества D может быть найдена по формуле $|D| = \iint_D dxdy$. Если в формуле Грина положить $Q(x, y) = x$, а $P(x, y) = 0$, то получим

$$|D| = \iint_D dxdy = \oint_L xdy.$$

Аналогично, полагая $Q(x, y) = 0$, а $P(x, y) = -y$, получим

$$|D| = \iint_D dx dy = - \oint_L y dx.$$

Наконец, если $Q(x, y) = x/2$, а $P(x, y) = -y/2$, будем иметь

$$|D| = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

Независимость от пути интегрирования и связь с полным дифференциалом

Определение 5. Пусть для любых двух точек $A, B \in D$ и для любых двух разных путей L_1 и L_2 из A в B содержащихся в области D , в которой заданы функции P, Q, R , справедливо равенство

$$\int_{L_1} P dx + Q dy + R dz = \int_{L_2} P dx + Q dy + R dz.$$

Тогда говорят, что криволинейный интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от пути интегрирования.

Теорема 7. Пусть P, Q, R – гладкие функции в выпуклой области D , а L – кусочно-гладкая кривая в D с началом в A и концом в B . Для того, чтобы криволинейный интеграл второго рода $I = \int_L P dx + Q dy + R dz$ не зависел от пути интегрирования L , а зависел только от A и B , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция U , дифференцируемая на D , что

$$dU = P dx + Q dy + R dz.$$

Доказательство. Необходимость. Дано, что интеграл I не зависит от пути интегрирования. Пусть M_0 – фиксированная точка в области D , а $M(x, y, z)$ – переменная точка в D . Интеграл $\int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz$ по условию зависит только от M , потому является некоторой функцией от M . Докажем, что это и есть функция U . Пусть точки $M_1(x_1, y, z)$ и $M(x, y, z)$ лежат на отрезке прямой, содержащемся в D и параллельном оси Ox . Тогда в силу аддитивности криволинейного интеграла получим

$$\begin{aligned} U(M) - U(M_1) &= \int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz - \int_{M_0 M_1} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{M_1 M} P dx + Q dy + R dz = \int_{M_1 M} P dx = \int_{x_1}^x P(t, y, z) dt. \end{aligned}$$

Продифференцируем последний интеграл по верхнему пределу, считая $U(M_1)$ константой:

$$U'_x(M) = P(M).$$

Аналогично проверяется, что $Q'_y = Q$, а $R'_z = R$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть кривая L параметризована функциями $x(t), y(t), z(t)$, причём $t \in [0, 1]$ (такая параметризация всегда возможна, так как любой отрезок можно перевести

в $[0, 1]$ с помощью линейной функции). Пусть A и B – начало и конец L . Тогда, переходя от криволинейного интеграла к интегралу Римана, получим

$$\int_L dU(x, y, z) = \int_0^1 U'_t(x(t), y(t), z(t)) dt = U(B) - U(A).$$

Таким образом, криволинейный интеграл от полного дифференциала не зависит от пути интегрирования, а зависит только от его начала и конца. $\square$

Теперь выясним, для простоты ограничившись двумерным случаем, когда выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом, то есть равно dU при некоторой функции U .

Теорема 8. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{R}^2$, а функции P, Q, P'_y и Q'_x дифференцируемы на D . Выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом на D тогда и только тогда, когда $P'_y = Q'_x$ во всех точках D .

Доказательство. Необходимость. Если выражение $Pdx + Qdy$ – полный дифференциал функции U , то

$$P'_y = (U'_x)'_y = (U'_y)'_x = Q'_x$$

в силу теоремы Шварца (см. второй семестр). Итак, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – фиксированная точка области D , а $M(x, y)$ – переменная точка в этой области.

Криволинейный интеграл $\int_{M_0M} Pdx + Qdy$ при заданных условиях на P и Q не зависит от пути интегрирования, а зависит только от его начала и конца (выведите это из формулы Грина в качестве **упражнения**). Так как точка M_0 фиксирована, то криволинейный интеграл $\int_{M_0M} Pdx + Qdy$ является функцией от M , то есть

$$U(M) = \int_{M_0M} Pdx + Qdy.$$

Проверим, что $U'_x(M) = P(M)$. Возьмём точку $M'(x+h, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} U(M') - U(M) &= \int_{M_0M'} Pdx + Qdy - \int_{M_0M} Pdx + Qdy = \int_{MM'} Pdx + Qdy = \\ &= \int_x^{x+h} P(x, y) dx = P(x + \theta h, y) \cdot h, \quad \theta \in [0, 1], \end{aligned}$$

где в последнем равенстве использована теорема о среднем, которую можно применить, так как P непрерывна. Тогда, снова в силу непрерывности P ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} P(x + \theta h, y) = P(x, y),$$

то есть по определению частной производной $U'_x(M) = P(M)$, что верно для любой точки в области D , так как мы фиксировали произвольную точку.

Точно также проверяется, что $U'_y = Q$, поэтому теорема доказана. $\square$

Область на плоскости называется *односвязной*, если любой контур, лежащий в этой области, ограничивает часть плоскости, также целиком лежащую в этой области. Проще говоря, односвязная область – это “область без дырок”. Точно также доказывается справедливость теоремы и для односвязной области.

Формула Гаусса – Остроградского

Теорема 9. Формула Гаусса – Остроградского. Пусть кусочно-гладкая поверхность S ограничивает тело V в пространстве $\mathbb{R}^3$ и выбрана её внешняя сторона, а функции P , Q , R непрерывно дифференцируемы на множестве V . Тогда справедлива **формула Гаусса-Остроградского**:

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

или, что равносильно,

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала поверхность S , ограниченную снизу и сверху поверхностями S_1 и S_2 , явно заданными уравнениями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ соответственно, а сбоку – цилиндрической поверхностью S_3 с прямолинейными образующими, параллельными оси Oz . При этом пусть (x, y) принадлежит множеству D на плоскости Oxy (см. рисунок).

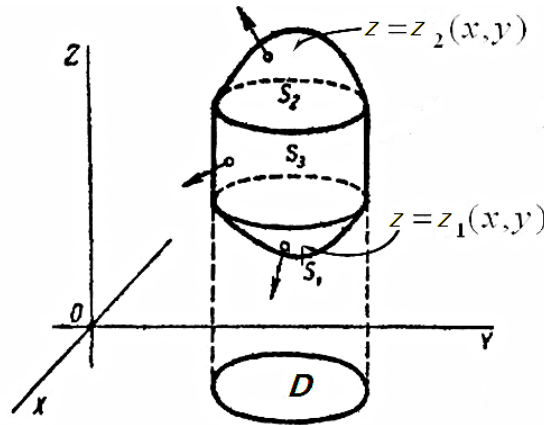


Рис. 4: Поверхность S проецируется на D .

Пусть функция R удовлетворяет условиям теоремы на множестве, ограниченном этой поверхностью. Тогда мы можем воспользоваться теоремой о сведении тройного интеграла к двойному:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D (R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy = \\ &= \iint_{S_2} R dx \wedge dy + \iint_{S_1} R dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Последнее равенство имеет место, так как интеграл $\iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy$ равен интегралу $\iint_{S_2} R dx \wedge dy$, взятому по верхней стороне поверхности S_2 , а $-\iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy$ равен интегралу $\iint_{S_1} R dx \wedge dy$, взятому по нижней стороне поверхности S_1 . То, что выбраны именно такие стороны поверхностей, следует из условия, так как в нём мы рассматриваем внешнюю сторону всей поверхности S .

Кроме того, поверхностный интеграл по боковой цилиндрической части поверхности, которую мы обозначили S_3 , равен нулю, поэтому, пользуясь аддитивностью поверхностного интеграла второго рода, получаем

$$\iint_{S_1} R dx \wedge dy + \iint_{S_2} R dx \wedge dy = \iint_S R dx \wedge dy,$$

то есть в этом случае теорема доказана.

Если поверхность S будет ограничена сзади поверхностью $y = y_1(x, z)$, спереди – поверхностью $y = y_2(x, z)$, а сбоку – цилиндрической поверхностью с прямолинейными образующими, параллельными оси Oy , то точно также доказывается, что

$$\iint_S Q dx \wedge dz = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz.$$

Если же поверхность S ограничена слева поверхностью $x = x_1(y, z)$, справа – поверхностью $x = x_2(y, z)$, а сбоку – цилиндрической поверхностью с прямолинейными образующими, параллельными оси Ox , то получим, что

$$\iint_S P dy \wedge dz = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz.$$

Предположим теперь, что поверхность S может быть представлена любым из трёх разобранных способов. Тогда для функций P , Q , R мы можем применить рассуждения выше, после чего, складывая полученные равенства, мы и придём к формуле

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Рассмотрим теперь более сложно устроенные тела. Ограничимся случаем, когда тело V является объединением нескольких тел $V_1, V_2, \dots, V_n$, причём эти тела пересекаются только по частям ограничивающих их поверхностей S_j ($j = 1, \dots, n$), а все граничные поверхности удовлетворяют условиям теоремы. Тогда по свойствам тройных интегралов.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \sum_{j=1}^n \iiint_{V_j} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

К каждому слагаемому справа мы можем применить формулу Гаусса – Остроградского:

$$\sum_{j=1}^n \iiint_{V_j} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \sum_{j=1}^n \iint_{S_j} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Докажем, что

$$\sum_{j=1}^n \iint_{S_j} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

где S – поверхность, ограничивающая тело V . Для этого надо показать, что поверхностные интегралы по общей части границ любых двух различных тел V_k и V_l из числа тех, что в объединении дают V , сокращаются. Но граница каждого такого тела является кусочно-гладкой поверхностью, у которой выбрана внешняя сторона. Тогда если тела V_k и V_l имеют общую границу S_{kl} (см. рисунок), то эта поверхность кусочно-гладкая, а интеграл по ней

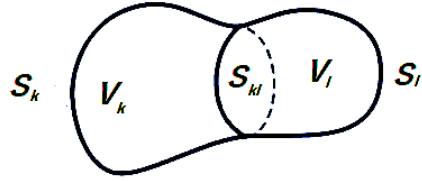


Рис. 5: Тела V_k и V_l пересекаются по поверхности S_{kl} .

входит в сумму $\sum_{j=1}^n \iint_{S_j} Pdy \wedge dz + Qdx \wedge dz + Rdx \wedge dy$ дважды: один раз как часть интеграла по S_k , а второй раз – с противоположным знаком как часть интеграла по S_l , причём знаки интегралов противоположны потому, что внешняя ориентация для поверхности, ограничивающей V_k задаётся нормальми, которые на S_{kl} направлены внутрь тела V_l и наоборот. Таким образом, пользуясь аддитивностью, мы можем сократить все интегралы по общим частям границ тел V_j ($j = 1, \dots, n$), а тогда останется только интеграл по границе тела V без внутренних “перегородок”, имеющих нулевой объём. $\square$

Примеры применения этой теоремы будут приведены в лекциях, посвященных векторному анализу.

Два доказательства формулы Стокса

Напомним, что кусочно-гладкий контур l на плоскости положительно ориентирован, если множество D , границей которого он является, остаётся при обходе этого контура слева. Пусть двусторонняя поверхность S задаётся гладким отображением $z = F(x, y)$ на D , причём поверхность S ограничена кусочно-гладким контуром L , который является образом l при отображении F . Пусть поверхность S ориентирована (то есть на ней в каждой точке задано непрерывное поле нормалей), причём если выбрана верхняя сторона плоскости, в которой лежит D , то выбирается верхняя сторона поверхности, а если выбрана нижняя сторона плоскости, то выбирается и нижняя сторона поверхности. Тогда ориентацию контура L называют *согласованной* с ориентацией поверхности, если при отображении F ориентация на l порождает положительную ориентацию на $F(l) = L$. Нестрого говоря, контур L положительно ориентирован, если при его обходе поверхность остаётся слева, причём наблюдатель направлен в ту же сторону, что и выбранная нормаль к плоскости, соответствующей стороне поверхности (см. рисунок).

В более общем случае параметрически заданной поверхности область изменения параметров u и v – это множество Δ на плоскости. Границу Δ снова назовём l . Сама поверхность задаётся уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, причём функции x, y, z гладкие на $\Delta \cup l$. Если такая параметризация переводит положительную ориентацию контура l в положительную ориентацию контура L , являющегося, как и выше, границей S и образом при указанной параметризации поверхности, то ориентации L и S согласованы.

Теорема 10. Формула Стокса. Пусть S – гладкая двусторонняя поверхность, на которой выбрано направление нормали (то есть S ориентирована), а L – кусочно-гладкий

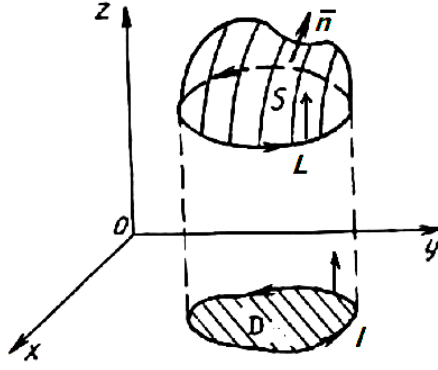


Рис. 6: Согласованность ориентации поверхности и её границы.

контур, являющийся границей S , причём ориентации S и L согласованы. Пусть также функции P , Q , R непрерывно дифференцируемы на $S \cup L$. Тогда справедлива **формула Стокса**:

$$\oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

или, что равносильно,

$$\iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS = \oint_L (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Доказательство. Докажем равенство $\oint_L Pdx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS$. Для этого используем формулу Грина.

Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $t \in [a, b]$, а функции x , y , z непрерывно дифференцируемы. Пусть также поверхность задана явным уравнением, то есть

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

Проекция поверхности S на плоскость Oxy – это множество D , границу которого обозначим l , причём l является проекцией L и задаётся параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Кривая l положительно ориентирована.

По теореме о связи криволинейного и двойного интегралов имеем следующие равенства:

$$\oint_L P(x, y, z)dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t)))x'(t)dt = \oint_l P(x, y, z(x, y))dx,$$

то есть криволинейные интегралы от Pdx по контурам L и l совпадают. По формуле Грина

$$\oint_l P(x, y, z(x, y))dx = - \iint_D P'_y(x, y, z(x, y))dxdy = - \iint_D (P'_y + P'_z \cdot z'_y)dxdy.$$

Пусть $\bar{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – нормаль к поверхности S в точке $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$. Тогда $\bar{n}$ пропорционален нормали к касательной плоскости $\bar{N} = \{z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1\}$, откуда имеем равенства

$$\frac{\cos \alpha}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{\cos \beta}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{\cos \gamma}{-1},$$

а тогда получаем $\cos \alpha = -z'_x(x_0, y_0) \cos \gamma$, $\cos \beta = -z'_y(x_0, y_0) \cos \gamma$. Тогда в силу выражения поверхностного интеграла через двойной получим равенство

$$\oint_L P(x, y, z) dx = - \iint_D (P'_y + P'_z \cdot z'_y) dx dy = \iint_S (P'_z \cos \beta - P'_y \cos \gamma) dS.$$

Точно также доказываются равенства

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_S (Q'_x \cos \gamma - Q'_y \cos \alpha) dS$$

и

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_S (R'_y \cos \alpha - R'_x \cos \beta) dS.$$

Складывая эти три равенства, получаем утверждение теоремы. $\square$

На экзамене можно ограничиться приведённым выше доказательством и быть готовым ответить на дополнительные вопросы к нему, а мы приведём ещё одно доказательство. На этот раз будем считать, что поверхность S задана параметрически с помощью отображения $\bar{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ из выпуклого множества (то есть такого, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и отрезок прямой, который их соединяет) $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, причём отображение $\bar{r}$ дважды непрерывно дифференцируемо. Также считаем, что при этом отображении кусочно-гладкая граница l' множества Δ переходит в контур L . Все остальные условия сохраняются.

В этом доказательстве будут использованы свойства операции внешнего дифференцирования $\wedge$. Полезно прочитать об этом. Например, можно изучить эти свойства по второму тому учебника В. А. Зорича или по третьему тому сборника задач по математическому анализу И. А. Виноградовой, С. Н. Олехника и В. А. Садовниченко.

Доказательство. Опять же, так как поверхностный интеграл второго рода обладает свойством линейности, то достаточно доказать, что

$$I = \oint_L P dx = \iint_S P'_z dz \wedge dx - P'_y dx \wedge dy = J.$$

Граница l' множества Δ может быть параметризована функциями $u = u(t)$, $v = v(t)$, причём $t \in [0, 1]$ и $u(0) = u(1)$, $v(0) = v(1)$. Тогда на L задана параметризация $\bar{r}(u(t), v(t))$. Выражая криволинейный интеграл через интеграл Римана, получим

$$I = \int_0^1 P(\bar{r}(u(t), v(t))) dx(u(t), v(t)) = \oint_{l'} P(\bar{r}(u, v)) dx(u, v) = \oint_{l'} P(\bar{r}(u, v)) (x'_u du + x'_v dv).$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала и непрерывности вторых частных производных функций x, y, z имеем, используя формулу Грина:

$$I = \iint_{\Delta} P'_z dz \wedge dx - P'_y dx \wedge dy = J_1.$$

Интеграл J_1 можно рассматривать как поверхностный интеграл второго рода по плоской области Δ . При параметризации $\bar{r} = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ интегралы J и J_1 равны одному и тому же двойному интегралу. Проверим это:

$$dz(u, v) \wedge dx(u, v) = (z'_u du + z'_v dv) \wedge (x'_u du + x'_v dv) = (z'_u x'_v - z'_v x'_u) du dv = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} du dv$$

и, аналогично,

$$dx(u, v) \wedge dy(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} dudv.$$

По теореме о связи между поверхностными и двойными интегралами

$$J = J_1 = \iint_{\Delta} \left(P'_z \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} - P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \right) dudv.$$

Таким образом, $I = J_1 = J$. Аналогично можно доказать равенства для интегралов от функций Q и P . Сложив все равенства, получим формулу Стокса. $\square$

Если поверхность S – это часть плоскости $z = 0$, ограниченная плоским кусочно-гладким контуром L , и в точках этой части плоскости заданы непрерывно дифференцируемые функции P и Q , то формула Стокса – это доказанная ранее формула Грина.

Для запоминания выражения под знаком поверхностного интеграла первого рода в формуле Стокса удобно записать его в виде определителя специального вида, который раскрывается по первой строке:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} &= \cos \alpha \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} + \cos \beta \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} + \cos \gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma. \end{aligned}$$

Тогда сама формула Стокса может быть записана в виде

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_L (Pdx + Qdy + Rdz).$$