Лекция 18

Достаточное условие экстремума

Согласно теореме Ферма, если функция f, определенная на интервале (a, b), имеет в некоторой точке c этого интервала экстремум и дифференцируема в этой точке, то $f'(c) = 0$. Эта теорема даёт *необходимое условие существования экстремума*, то есть, в случае дифференцируемости функции, её точки экстремумов содержатся среди тех точек, в которых производная этой функции равна нулю. Однако не все те точки, производная в которых равна нулю, являются точками экстремума: например, у функции $y = x^3,\ x \in \mathbb{R}$ производная в нуле равна нулю, но экстремума в этой точке нет, так как эта функция возрастает на всей области определения. Таким образом, теорема Ферма не является *достаточным условием существования экстремума.*

Сейчас для тех функций, которые в точке имеют производные высших порядков, мы докажем теорему, в которой из некоторых условий на производные в точке будет следовать существование экстремума в этой точке, то есть будут доказаны условия, выполнения которых достаточно для наличия в точке экстремума.

Теорема 1. ***(Достаточное условие экстремума)*** *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a и дифференцируема n раз в точке a, причём*

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

а $f^{(n)}(a) \neq 0$. Тогда если $n = 2k$ и $f^{(n)}(a) < 0$, то a – точка максимума, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(a) > 0$, то a – точка минимума, а если $n = 2k - 1$, то экстремума нет.

Доказательство. В силу условия для функции f мы можем записать локальную формулу Тейлора в точке a, которая, с учётом равенства нулю производных, запишется в виде:

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - 1)^n),\ x \to a.$$

В достаточно малой окрестности точки a бесконечно малая величина $o((x-a)^n)$ пренебрежимо мала по сравнению с $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, поэтому знак разности $f(x) - f(a)$ совпадает со знаком выражения $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Если n чётное, то $(x - a)^n \geq 0$, поэтому при $f^{(n)}(a) < 0$ в достаточно малой окрестности точки a $f(x) \leq f(a)$, то есть в точке a максимум, а при $f^{(n)}(a) > 0$ $f(x) \geq f(a)$ в достаточно малой окрестности точки a, то есть в точке a минимум. Если n нечётное, то выражение $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ меняет знак при переходе через точку a, а тогда (в достаточно малой окрестности точки a) знак меняет и разность $f(x) - f(a)$, поэтому экстремума в точке a нет. □

В частности, если первая производная функции в точке равна нулю, а вторая отлична от нуля, то в этой точке функция имеет экстремум.

С помощью второго следствия теоремы Лагранжа можно сформулировать достаточные условия существования экстремума в терминах первой производной. Речь идёт о том, что *если функция f дифференцируема на интервале (a, b), $f'(c) = 0$ $(c \in (a, b))$ и $f'(x) \leq 0$ при $x \in (a, c)$, $f'(x) \geq 0$ при $x \in (c, b)$, то в точке c у функции f локальный минимум.* Для максимума желающие могут сформулировать аналогичное утверждение и доказать эти утверждения в качестве упражнения.

Отметим при этом, что, конечно, бывают локальные экстремумы и в точках, в которых производная не существует, как, например, у функции $y = |x|$.

Определение 1. *Функция f, определённая на интервале (a,b), называется выпуклой (выпуклой вниз) на этом интервале, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено неравенство*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{1}$$

Если при тех же условиях выполнено противоположное неравенство, то функцию f называют вогнутой (выпуклой вверх) на интервале (a,b).

Выражение $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ при $\lambda \in [0,1]$ задаёт отрезок с концами x_1 и x_2. Геометрически определение выпуклости означает, что всякая хорда, соединяющая две точки графика функции, *лежит над графиком функции*, а определение вогнутости означает, что любая хорда *лежит под графиком функции* (см. рисунок 1).

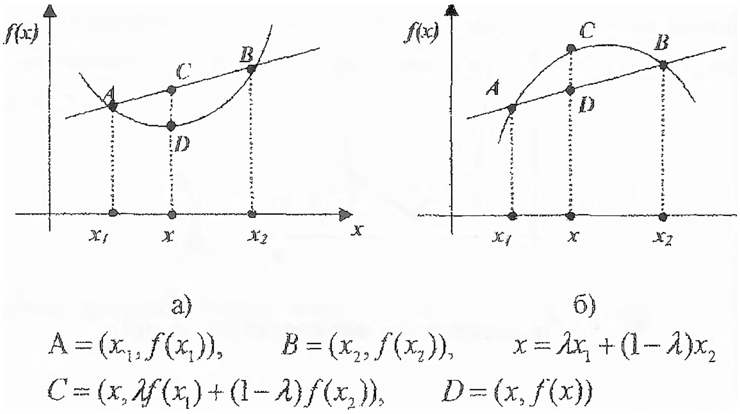

Рис. 1: а) Выпуклая функция; б) Вогнутая функция

Отметим **(интересующиеся могут доказать)**, что выпуклые и вогнутые функции на интервале (a,b), являются непрерывными на этом интервале и имеют в каждой точке интервала левые и правые производные (но они необязательно равны).

Предложение 1. *Функция f выпукла на интервале (a,b) тогда и только тогда, когда для любых таких чисел $x_1,\ x_2,\ y \in (a,b)$, что $x_1 < y < x_2$, выполнено неравенство*

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}. \tag{2}$$

Прежде чем доказывать это предложение, отметим, что его геометрический смысл состоит в том, что тангенсы углов наклонов секущих не убывают с увеличением абсцисс точек пересечения с графиком функции f. Отсюда следует, что любая прямая пересекает график выпуклой функции в двух точках, либо (например, в случае функций $y=x$ или $y=|x|$) совпадает с частью графика или всем графиком.

Доказательство. **Необходимость.** Если функция выпукла, то для неё выполнено неравенство (1). Любая точка $y \in (x_1,x_2)$ может быть записана в виде $y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ при некотором $\lambda \in (0,1)$. Выразим λ из последнего равенства: $\lambda = \frac{y-x_2}{x_1-x_2}$ и запишем неравенство (1), подставив такое λ:

$$f(y) \leq \frac{y-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \left(1 - \frac{y-x_2}{x_1-x_2}\right) f(x_2) = \frac{y-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-y}{x_1-x_2} f(x_2).$$

Используя равенство $x_1 - x_2 = x_1 - y + y - x_2$ и домножая обе части на $x_1 - y + y - x_2$ (это выражение меньше нуля!), получим:

$$(x_1 - y)f(y) + (y - x_2)f(y) \geq (y - x_2)f(x_1) + (x_1 - y)f(x_2)$$
$$\Leftrightarrow (f(y) - f(x_1))(x_2 - y) \leq (f(x_2) - f(y))(x_2 - y).$$

Последнее неравенство равносильно неравенству (2).

Достаточность. Нам нужно вывести из неравенства (2) неравенство (1). Отметим, что при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ (1) превращается просто в равенство. При $\lambda \in (0, 1)$ любое число $y \in (x_1, x_2)$ представимо в виде $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$. Подставив это равенство в (2) и проведя преобразования из доказательства необходимости в обратном порядке, получим неравенство (1). □

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для вогнутых функций.

Все замечания, сделанные перед доказательством предложения 1, верны и для вогнутых функций.

Теперь выясним, как связаны дифференцируемость функции и выпуклость. Выпуклые функции необязательно дифференцируемы, но если рассматривать только те выпуклые функции, которые дифференцируемы, то можно получить ряд новых полезных понятий и утверждений.

Предложение 2. ***(Следствие предложения 1)*** *Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда выпуклость f на этом интервале равносильна тому, что функция f' не убывает на (a, b).*

Доказательство. Пусть условия на числа $x_1,\ x_2,\ y$ те же, что в предложении 1.

Необходимость. Если функция f выпукла, то для неё выполнено неравенство (2). Устремляя y к x_1, в левой части неравенства, а затем к x_2 в правой части неравенства, получим, в силу определения производной и предельного перехода в неравенствах, что

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Таким образом, f' не убывает на отрезке (a, b).

Достаточность. Пусть производная f' не убывает на (a, b). На отрезках $[x_1, y]$ и $[y, x_2]$ к функции f применима теорема Лагранжа, в силу которой найдутся такие точки $c_1 \in (x_1, y)$ и $c_2 \in (y, x_2)$, что $f(y) - f(x_1) = f'(c_1)(y - x_1)$ и $f(x_2) - f(y) = f'(c_2)(x_2 - y)$. Тогда, в силу неубывания производной,

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y},$$

то есть выполнено неравенство (2), которое равносильно выпуклости функции f на отрезке (a, b). □

Функция f' также может быть дифференцируемой на интервале (a, b). Так как неубывание функции на интервале равносильно неотрицательности её производной (2-е следствие теоремы Лагранжа, лекция 18), то можем сформулировать критерий выпуклости для дважды дифференцируемых на интервале функций.

Предложение 3. ***(Следствие предложения 2)*** *Пусть функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда выпуклость f на этом интервале равносильна тому, что функция f'' неотрицательна на (a, b).*

Доказательство. Это утверждение прямо следует из 2-го следствия теоремы Лагранжа и предложения 2. □

Предложение 4. ***(Следствие предложения 2)*** *Если функция f дифференцируема и выпукла на интервале (a, b), то при всех $x, x_0 \in (a, b)$ $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*

Доказательство. На любом отрезке, содержащемся в интервале (a, b) функция f удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому найдётся такая точка c, принадлежащая интервалу с концами x и x_0, что $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. В силу предложения 2 выражение $(f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$ всегда неотрицательно, поэтому $f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0$, чем всё и доказано. □

Функция $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ задаёт уравнение касательной к графику функции f в точке x_0 (см. лекцию 16). Таким образом, геометрически это предложение означает, что график выпуклой функции лежит над любой касательной к этому графику (см. рис. 2).

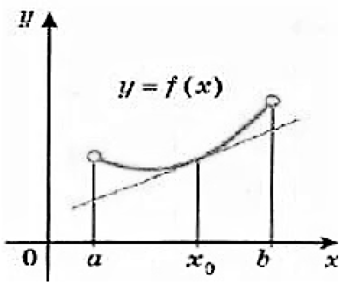

Рис. 2: График функции над касательной

Упражнение. Сформулируйте и докажите аналогичные предложениям 2 – 4 утверждения для вогнутых функций.

Теперь предположим, что функция f имеет n производных в точке a, причём производные со второй по $n-1$-ю равны нулю, а производная порядка n отлична от нуля (о первой производной мы не делаем никаких дополнительных предположений.) Запишем локальную формулу Тейлора для функции f в точке a в следующем виде:

$$f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a)) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n).$$

Слева стоит разность значений функции f и касательной к графику этой функции в точке a. Используя те же соображения, что в теореме 1, можно показать, что в достаточно малой окрестности точки a левая часть не меняет знак при чётном n и этот знак совпадает со знаком $f^{(n)}(a)$. Таким образом, график функции f в достаточно малой окрестности лежит или над касательной, или под касательной.

Если же n нечётное, то знак разности меняется при переходе через точку a. Если слева и справа от точки a направления выпуклости при этом не меняются в некоторых интервалах с общим концом a, то говорят, что функция f в точке a имеет *перегиб*, а саму точку a называют *точкой перегиба* (см. рис. 3). Например, график функции $y = x^3$ в нуле имеет в нуле перегиб.

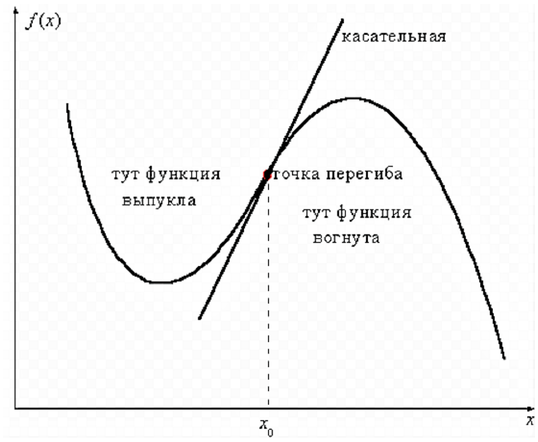

Рис. 3: В точке $a = x_0$ функция f имеет перегиб

Построение графика функции

Мы обсудили свойства монотонности и выпуклости функции, дали определение экстремумов функции, разобрали понятие точки перегиба, то есть обсудили многие основные характеристики графика функции. Сейчас будут даны определения асимптот, после чего мы запишем план исследования графика функции, позволяющий строить эскизы многих графиков с отражением практически всех основных свойств.

Определение 2. *Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $-\infty$, либо $+\infty$.*

Например, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота графика функции $y = 1/x$.

Определение 3. *Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$, если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1),\ x \to +\infty$.*

При $x \to -\infty$ наклонная асимптота определяется аналогично.

Приведём без доказательства теорему, позволяющую находить наклонные асимптоты с помощью пределов.

Теорема 2. *Наклонная асимптота функции f при $x \to +\infty$ существует тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:*
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$;
2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Упражнение. 1) Может ли график функции пересекать наклонную асимптоту?
2) Как определить, сверху или снизу приближается график функции f к наклонной асимптоте при $x \to +\infty$?

Далее выпишем общую схему построения графика функции. Все термины, используемые в ней, либо изучались в нашем курсе, либо встречались в школьном курсе.

Общая схема построения графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на чётность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Найти точки пересечения графика с осями координат.

3. Исследовать значения функции на границах области определения, определить характеры точек разрыва и найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты.
5. Определить промежутки монотонности и экстремумы.
6. Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
7. Построить график функции.