Лекция 16

Раскрытие неопределённостей

Сейчас мы изучим часто используемые при подсчёте пределов утверждения. Отметим, что хотя их и принято называть правилами Лопиталя, но считается, что открыл их Иоганн Бернулли, сообщивший в письме Гийому Лопиталю об этих правилах.

Теорема 1. *(1-е правило Лопиталя, неопределённость вида $\frac{0}{0}$)*
Пусть:
1) функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b);
2) $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$;
3) $g'(\xi) \neq 0 \;\forall\, \xi \in\, (a, b)$;
4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Сначала считаем, что

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

где A – конечное число.

Рассмотрим точки $x, y \in (a, b)$, $x < y$. Так как $g'(\xi) \neq 0 \;\forall\xi \in (a, b)$, то $g(y) - g(x) \neq 0$. Таким образом, мы можем применить к функциям f и g теорему Коши:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\; c \in (x, y).$$

Домножим обе части этого равенства на $g(x)-g(y)$, а затем разделим на $g(x)$. В результате получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Так как отношение производных имеет предел, то

$$\forall\varepsilon > 0\; \exists\delta > 0 :\; \forall x, y : b > y > x > b - \delta\;\; \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon,$$

так как c лежит между x и y. Таким образом, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A - \frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|.$$

Зафиксировав такое x, чтобы выполнялись выписанные выше неравенства, и учитывая условие 2 теоремы, получим, что $\lim\limits_{y\to b-} |\frac{g(y)}{g(x)}| = 0$. Возьмем такое $\delta > 0$, что $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ и $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. Тогда, используя то, что имеющая предел функция ограничена и выбирая такую константу $C > 0$, что $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \leq C$, получим

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon + C\cdot\varepsilon + \varepsilon = (2 + C)\varepsilon,$$

откуда $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Если теперь предположить, что предел отношения производных равен ∞, то мы можем зафиксировать такое x, что выражение $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ будет достаточно большим при всех $c \in (x, y)$, а y мы можем выбрать таким, что выражение $1 - \frac{g(y)}{g(x)}$ достаточно близко к 1, а $\frac{f(y)}{g(x)}$ – к нулю. Тогда, снова используя равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)},$$

получим, что и $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ достаточно велико (рекомендуется расписать через ε и δ, как выше при конечном A). Таким образом, теорема доказана. □

Замечание. 1) В первом правиле Лопиталя можно заменить условие $x \to b-$ на $x \to a+$. При этом для доказательства мы просто сделаем замену переменной $t = a+b-x$ и сведём всё к только что доказанной теореме.
2) С учётом этого факта можно рассмотреть двустороннюю окрестность точки a и сформулировать правило Лопиталя уже не для одностороннего, а для обычного предела. При этом доказательство будет следовать из первой части замечания и теоремы 1.

Сформулируем второе правило Лопиталя.

Теорема 2. *(2-е правило Лопиталя, неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$)*
Пусть:
1) функции f и g определены и дифференцируемы на интервале (a, b);
2) $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = \infty$;
3) $g'(\xi) \neq 0 \ \forall\, \xi \in \ (a, b)$;
4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Тогда справедливо равенство $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. (необязательный материал) Снова сначала считаем, что

$$\lim_{x\to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

где A – конечное число.

Рассмотрим точки $x, y \in (a, b)$, но в этот раз пусть $x > y$. Так как $g'(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in (a, b)$, то $g(x) - g(y) \neq 0$. Таким образом, мы можем применить к функциям f и g теорему Коши:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \ c \in (y, x).$$

Снова преобразуем равенство к виду

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Так как отношение производных имеет предел, то снова

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall x, y : b > x > y > b - \delta \ \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon,$$

так как c лежит между x и y. Таким образом, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A - \frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\right| \leq \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|.$$

На этот раз фиксируем такое y (то есть $f(y)$ и $g(y)$ – это фиксированные числа), чтобы выполнялись выписанные выше неравенства, и учитывая условие 2) теоремы, получим, что $\lim\limits_{x\to b-} |\frac{g(y)}{g(x)}| = 0$. Возьмем достаточно близкие к b значения x, чтобы $\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ и $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. Тогда, используя то, что имеющая предел функция ограничена и выбирая такую константу $C > 0$, что $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \leq C$, получим

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| + \left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right| \cdot \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon + C \cdot \varepsilon + \varepsilon = (2 + C)\varepsilon,$$

откуда $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Рассуждения для бесконечного предела аналогичны тем, что выписаны в первом правиле Лопиталя. Таким образом, теорема доказана *(конец необязательного материала).*

$\square$

Замечание, аналогичное сделанному после первого правила Лопиталя, справедливо и здесь.

Приведём важные примеры применения правила Лопиталя.

Пример 1. *1) Согласно второму правилу Лопиталя при всех натуральных n*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = ... = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Это означает следующий важный факт: ***при $x \to +\infty$ экспонента растёт быстрее степени.***
2) Аналогично, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{1/x} = +\infty$. Это значит, что ***при $x \to +\infty$ степень растёт быстрее логарифма.***
3) Некоторые неопределённости можно сводить к таким, для которых применимо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \{0^0\} = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^{0\cdot(-\infty)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{(\frac{1}{x})}} =$$

$$= e^{\frac{-\infty}{+\infty}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} -\frac{x^2}{x}} = e^0 = 1$$

4) Покажем, что ***из существования предела отношения функций не следует существование предела отношения производных этих функций.*** *Действительно,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2},$$

то есть у отношения функций $f(x) = x - \sin x$ и $g(x) = 2x + \sin x$ есть предел. При этом отношение производных $\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$ предела не имеет, так как на последовательности

$$a_n = 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$$

предел этого отношения равен 0, а на последовательности

$$b_n = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{N}$$

этот предел равен 2, то есть предела у отношения производных нет в силу определения по Гейне.

Пусть функция f дифференцируема в каждой точке множества E. Тогда её производная f' определена на E и можно ставить вопрос о её дифференцируемости. Отметим, что производной функции f нулевого порядка называется сама функция f. Производная порядка n определяется индуктивно.

Определение 1. *Если у функции f в некоторой окрестности точки a существует производная $n-1$-го порядка $f^{(n-1)}$ (то есть эта производная представляет собой определённую в некоторой окрестности точки a функцию) и эта производная дифференцируема в точке a, то производная функции f порядка n в точке a – это производная функции $f^{(n-1)}$ в точке a : $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$. В терминах пределов:*

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}.$$

Ещё раз отметим, что, производная порядка $n-1$ определена в окрестности точки a, иначе символ $f^{(n-1)}(a+h)$ не имеет смысла.

Пример 2. *Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in \mathbb{Q}, \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases}$. Она непрерывна только в точке 0 и $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0, h \in \mathbb{Q}, \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0, h \in \mathbb{I}. \end{cases}$ Таким образом, $f'(0) = 0$. При этом $f''(0)$ не существует, так как f' не определена ни в какой окрестности точки 0.*

В этом примере было рассмотрено произведение функции Дирихле и квадратичной функции, то есть $f(x) = x^2 \cdot D(x)$. Важно, что здесь берётся именно x^2, так как, например, при умножении функции Дирихле на x мы бы получили непрерывную в нуле функцию, которая не является дифференцируемой.

Контрольный вопрос. Сколько раз дифференцируема в нуле функция

$$g(x) = \begin{cases} x^{10}, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{I} \end{cases},$$

то есть $g(x) = x^{10} \cdot D(x)$?

Следующая теорема позволяет находить производные высших порядков произведения функций. Она является обобщением формулы для вычисления первой производной произведения двух функций.

Предложение 1. ***(обобщенное правило Лейбница).*** *Пусть функции u и v n раз дифференцируемы в точке a. Тогда их произведение также n раз дифференцируемо в точке a и*

$$(u \cdot v)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(a) v^{(n-k)}(a). \tag{1}$$

Доказательство. Используем индукцию. При $n = 1$ $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$ по правилам дифференцирования, так что база индукции доказана. Пусть формула верна при $n = m-1$, то есть

$$(uv)^{(m-1)}(a) = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)}(a) v^{(m-1-k)}(a). \tag{2}$$

Нам нужно доказать, что эта формула верна при $n = m$. Для этого мы должны продифференцировать равенство (2):

$$(uv)^{(m)}(a) = ((uv)^{(m-1)}(a))' = \left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)}(a)v^{(m-1-k)}(a)\right)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k+1)}(a)v^{(m-1-k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)}(a)v^{(m-k)}(a) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} C_{m-1}^{k-1} u^{(k)}(a)v^{(m-k)}(a) + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)}(a)v^{(m-k)}(a) =$$
$$= u(a)v^{(m)}(a) + \sum_{k=1}^{m-1}(C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k)u^{(k)}(a)v^{(m-k)}(a) + u^{(m)}(a)v(a) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(k)}(a)v^{(m-k)}(a).$$

В третьей строке этой цепочки равенств мы поменяли индексы суммирования, а в конце воспользовались равенством $C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k = C_m^k$. Таким образом, теорема оказана по индукции. □

Приведём примеры применения этой формулы.

Пример 3. *Пусть* $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$. *Найдём* $f^{2023}(0)$. *Пусть* $u(x) = x^2 - x$, *а* $v(x) = e^{2x}$. *Так как* $u'''(x) = u^{(4)}(x) = ... = u^{(2023)}(x) = 0$, *то при применении формулы (1) справа останется лишь три слагаемых. Таким образом, получим:*

$$f^{2023}(0) = (2^{2023}(x^2 - x)e^{2x} + 2^{2022} \cdot 2023 \cdot (2x - 1)e^{2x} + 2^{2021} \cdot 2023 \cdot 2022 \cdot e^{2x})|_{x=0} =$$
$$= 2^{2021} \cdot 4086460.$$

Формула Лейбница может быть обобщена на случай произведения большего числа дифференцируемых функций.