Лекция 14

Правила дифференцирования и свойства дифференцируемых функций

Предложение 1. *Пусть функции f и g дифференцируемы в точке a. Тогда:*
1) функция $\alpha f + \beta g$ дифференцируема в точке a при любых $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ и

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

(свойство линейности);
2) $f \cdot g$ дифференцируема в точке a и $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (правило Лейбница);
3) если $g \neq 0$ в некоторой окрестности точки a, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a и $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$.

Доказательство. 1) Найдём производную функции $\alpha f + \beta g$ в точке a по определению, пользуясь арифметикой пределов:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(a+h) - (\alpha f + \beta g)(a)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \left(\alpha \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \beta \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$

2) Снова вычислим производную по определению, используя арифметику пределов:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} = \\ = \lim_{h\to 0} \left(g(a+h)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) = \\ = g(a)f'(a) + g'(a)f(a).$$

3) По арифметике пределов имеем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)/g(a+h) - f(a)/g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(a+h)g(a)} = \\ = \frac{1}{(g(a))^2} \cdot \lim_{h\to 0} \left(g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}.$$

□

Приведём пример применения правил дифференцирования.

Пример 1. *1) Согласно пункту 3)*

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Аналогично, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$.
2) Рассмотрим полезные функции: гиперболический синус $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и гиперболический косинус $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Согласно правилам дифференцирования

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}\left(e^x - \left(\frac{1}{e^x}\right)'\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Аналогично, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Отметим, что существует отдельный раздел математики – **гиперболическая тригонометрия**, во многом похожая на обычную тригонометрию. По аналогии с основным тригонометрическим тождеством можно записать **основное гиперболическое тождество:**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Упражнение. Показать, что для функции $y = \operatorname{sh} x$ существует обратная функция

$$\operatorname{arsh}\, x = \ln(1 + \sqrt{x^2+1})$$

(обратный гиперболический синус), а для функции $y = \operatorname{ch} x$ таковой является функция

$$\operatorname{arch}\, x = \ln(1 + \sqrt{x^2-1})\ (x \geq 1)$$

(обратный гиперболический косинус).

Следующая теорема также относится к правилам дифференцирования, но мы выделяем её в отдельную из-за большей сложности доказательства.

Предложение 2. ***(Производная сложной функции).*** *Пусть функция f дифференцируема в точке a, а функция g дифференцируема в точке $f(a)$. Тогда функция $g \circ f$ дифференцируема в точке a и $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.*

Доказательство. Так как функция g дифференцируема в точке $f(a)$, то при всех q из некоторой проколотой окрестности нуля

$$g(f(a)+q) - g(f(a)) = g'(f(a))q + \beta(q)q,\ \lim_{q\to 0}\beta(q) = 0.$$

Доопределим бесконечно малую функцию β в нуле, положив $\beta(0) := 0$, то есть доопределим функцию β в нуле по непрерывности. Теперь мы можем положить $q = f(a+h)-f(a)$. При этом при подстановке вместо q, принадлежащего проколотой окрестности нуля, приращения $f(a+h) - f(a)$ может возникнуть ситуация, при которой приращение для f равно нулю. Для того, чтобы при этом равенство для приращения g не нарушалось, мы и доопределили бесконечно малую функцию β в нуле по непрерывности. Отметим, что такое доопределение не нарушает дифференцируемость функции g, но позволяет корректно подставить $q = f(a+h) - f(a)$.

Тогда в силу дифференцируемости f (из которой вытекает, что

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h$$

и $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h) = 0$) в точке a, получим:

$$\begin{aligned}
&g(f(a+h)) - g(f(a)) = \\
&\qquad = g'(f(a))(f(a+h)-f(a)) + \beta(f(a+h)-f(a))(f(a+h)-f(a)) = \\
&\qquad = g'(f(a))f'(a)h + g'(f(a))\alpha(h)h + \beta(f'(a)h+\alpha(h)h)(f'(a)h+\alpha(h)h) = \\
&\qquad\qquad = g'(f(a))f'(a)h + \delta(h)h.
\end{aligned}$$

Мы использовали обозначение $\delta(h) = g'(f(a))\alpha(h) + \beta(f'(a)h + \alpha(h)h)(f'(a) + \alpha(h))$, а тогда из арифметики пределов и из бесконечной малости функций β и α следует, что $\delta(h) \to 0,\ h \to 0$. Таким образом, для функции $g \circ f$ получим при достаточно малых h :

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g'(f(a))f'(a)h + \delta(h)h,$$

что даёт дифференцируемость функции $g \circ f$ в точке a по определению. Мы знаем, что это равносильно наличию у функции $g \circ f$ производной в точке a. Таким образом, получаем, что $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$. □

В некоторой точке y, в которой дифференцируема функция g, мы можем записать дифференциал функции g в виде $dg(y) = g'(y)dy$ (см. предыдущую лекцию). Пусть f дифференцируема в точке x и $f(x) = y$. Теорема о производной сложной функции тогда в терминах дифференциалов запишется так (в точке x):

$$d(g \circ f)(x) = g'(f(x))f'(x)dx = g'(f(x))df(x) = g'(y)dy.$$

Таким образом, вне зависимости от того, является ли y независимой переменной или функцией, форма (то есть вид) первого дифференциала внешне не меняется. Это свойств дифференциала называется ***инвариантностью формы первого дифференциала.***

Упражнение. Доказать следующие формулы для дифференциалов (при тех же предположениях на функции, что и в правилах дифференцирования):
1) $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$;
2) $d(fg) = gdf + fdg$;
3) $d(f/g) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$.

Вычислим ещё несколько производных, пользуясь теоремой о производной сложной функции.

Пример 2. *1)* $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$;
2) $(\sin(\cos x))' = \sin' y \cdot y' = -\cos(\cos x) \sin x$, *где* $y = \cos x$.

Предложение 3. ***(Производная обратной функции).*** *Пусть* f *– непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал* I *в интервал* J. *Пусть также* f *дифференцируема в точке* $a \in I$ *и* $f'(a) \neq 0$. *Тогда обратная функция* f^{-1} *дифференцируема в точке* $b = f(a)$ *и* $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Доказательство. Существование, непрерывность и монотонность функции f^{-1} следует из теоремы об обратной функции. Воспользуемся определением производной, считая, что аргумент функции f^{-1} получает приращение q, а затем положим $q = f(a+h) - f(a)$ и воспользуемся теоремой о пределе композиции и арифметикой пределов:

$$\lim_{q \to 0} \frac{f^{-1}(f(a)+q) - f^{-1}(f(a))}{q} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(a) + (f(a+h) - f(a))) - f^{-1}(f(a))}{f(a+h) - f(a)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a + h - a}{f(a+h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

При этом $f(a+h) - f(a) \neq 0$ при $h \neq 0$, так как функция f строго монотонна. $\square$

В дифференциалах формула запишется так: $df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}$ (что следует из формулы $df^{-1}(f(a))(h) = \frac{1}{f'(a)}h$, тогда как $df(a)(h) = f'(a)h$, то есть линейные функции $df(a)$ и $df^{-1}(f(a))$ взаимно обратны).

Приведём примеры применения последней теоремы.

Пример 3. *1) Пусть* $\operatorname{tg} y = x$, *тогда при* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y = \operatorname{arctg} x$. *По теореме о производной обратной функции* $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} y)2} = \frac{1}{1+x^2}$. *Аналогично проверяется, что* $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2) Пусть $e^y = x$, *тогда* $\ln x = y$. $(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{x}$.
3) Теперь, зная производную логарифма, при любом вещественном α *из теоремы о производной сложной функции имеем* $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Упражнение. Найти, пользуясь теоремой о производной сложной функции производные arsh и arch .

Теперь выпишем **таблицу производных,** все равенства в которой либо уже выведены с использованием наших теорем, либо выводятся аналогично. При этом в основании логарифма и показательной функции мы считаем, что $a > 0,\ a \neq 1$, а все функции рассматриваются на своих областях определения.

$$\mathbf{1})\ C' = 0\ \forall C = const;\ \mathbf{2})\ (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (x > 0);\ \mathbf{3})\ (e^x)' = e^x;\ \mathbf{4})\ (a^x)' = a^x \ln a (a > 0,\ a \neq 1);$$

$$\mathbf{5})\ (\ln x)' = 1/x\ (x > 0); \mathbf{6})\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1);\ \mathbf{7})\ (\sin x)' = \cos x;$$

$$\mathbf{8})\ (\cos x)' = -\sin x;\ \mathbf{9})\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1\ (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\ (k \in \mathbb{Z}));$$

$$\mathbf{10})\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg}^2 x - 1\ (x \neq \pi k\ (k \in \mathbb{Z}));\ \mathbf{11})\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1);$$

$$\mathbf{12})\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1); \mathbf{13})\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\mathbf{14})\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};\ \mathbf{15})\ (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\ \mathbf{16})\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$