Лекция 12

Равномерная непрерывность

Начнём с примера.

Пример 1. *Пусть* $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$. *На этом интервале* f *непрерывна. Используем определение непрерывности для точки* $a = \frac{1}{10}$, *взяв* $\varepsilon = 0.1$. *Нужно подобрать такое* $\delta > 0$, *чтобы при всех таких* x *из интервала* $(0,1)$, *что* $|x - \frac{1}{10}| < \delta$, *мы бы получили* $|\frac{1}{x} - 10| < 0.1$. *Отсюда имеем* $\frac{10}{101} < x < \frac{10}{99}$, *а тогда в качестве* δ *нужно взять*

$$\min\left\{\left|\frac{1}{10} - \frac{10}{101}\right|, \left|\frac{1}{10} - \frac{10}{99}\right|\right\} = \frac{1}{1010}.$$

Если теперь взять при том же $\varepsilon = 0.1$ *точку* $a = \frac{1}{1000}$, *то для выполнения неравенства* $|\frac{1}{x} - 1000| < 0.1$ *нужно будет брать уже* $\delta = \frac{1}{10001000}$, *то есть выбор* δ *зависит от той точки* $a \in (0,1)$, *которую мы рассматриваем. Иллюстрация ниже показывает, что при одном и том же* $\varepsilon > 0$ *для разных точек нужно выбирать разные* $\delta > 0$: *правый вертикальный прямоугольник имеет большую ширину, а левый очень узкий, тогда как оба горизонтальных прямоугольника одинаковой высоты.*

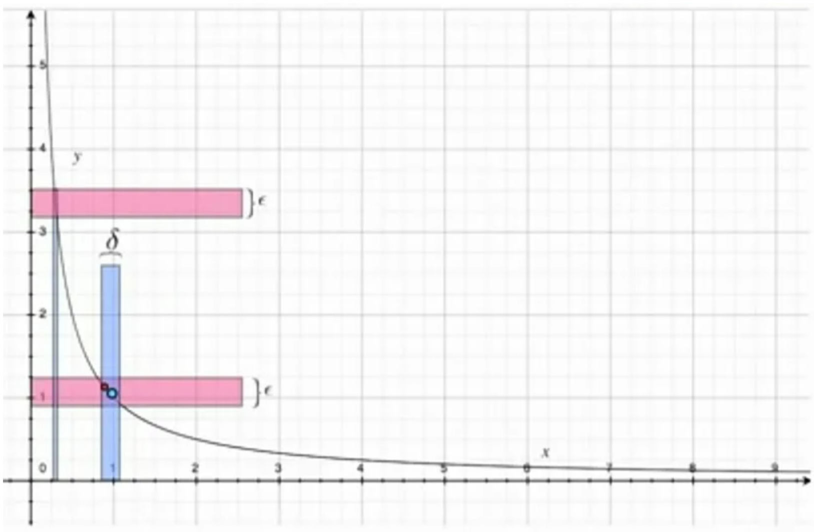

Рис. 1: См. зависимость ширины вертикальных прямоугольников от разных точек.

Нас будут интересовать те функции, для которых δ не зависит от точки непрерывности, а зависит только от ε. В таком случае говорят, что функция f равномерно непрерывна. Геометрически это означает, что прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, длины которых равны δ (горизонтальные стороны) и ε (вертикальные стороны), можно так перемещать вдоль графика функции, что график будет пересекать только вертикальные стороны или вершины, лежащие на одной диагонали, но не пересечёт горизонтальные стороны (на рисунке ниже это свойство не выполняется).

Дадим точное определение.

Определение 1. *Функция* f, *определенная на множестве* E, *называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что при всех таких* $x_1, x_2 \in E$, *что* $|x_1 - x_2| < \delta$, *выполнено неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Приведём ещё примеры функций со свойством равномерной непрерывности и без него.

Пример 2. *1) Функция $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т. к. $\forall \varepsilon > 0$ имеем: $|\sin x - \sin y| = |2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}| \leq 2|\sin\frac{x-y}{2}| \leq |x-y| < \varepsilon$, если $|x-y| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$. Таким образом, здесь выбор δ не зависит от точек на вещественной оси, а зависит только от ε.*
2) Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x > 0$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, так как точки вида $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ и $y = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $(n \in \mathbb{N})$ могут быть сколь угодно близки друг к другу при достаточно больших n, но $|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}| = 2$ при всех натуральных n, то есть при $0 < \varepsilon < 2$ необходимо будет подбирать δ в зависимости от конкретной точки. Рисунок 2 ниже демонстрирует это. Красная часть графика пересекает верхнюю и нижнюю стороны одного из прямоугольников. Чтобы этого не было, нужно уменьшить длину δ горизонтальной стороны при приближении к нулю. Это значит, что равномерной непрерывности нет.

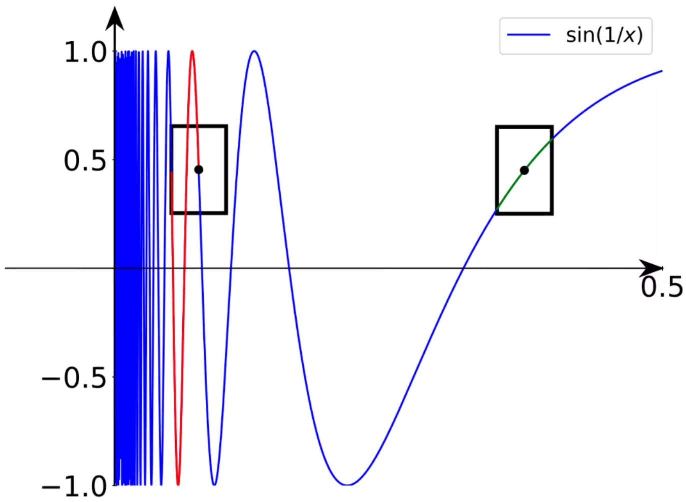

Рис. 2: Чем ближе к нулю, тем быстрее растёт функция на промежутках монотонности.

Докажем теперь теорему о замечательном свойстве функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 1. ***(Гейне – Кантора о равномерной непрерывности)****. Функция f, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим, что функция f не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Тогда существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого натурального n найдутся такие точки $x_n \in [a,b]$ и $y_n \in [a,b]$, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_1. \tag{1}$$

Все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и принадлежат отрезку $[a,b]$, поэтому в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Обозначим предел этой подпоследовательности x_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $K \in \mathbb{N}$, что при всех $k > K$ справедливо неравенство $|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon$. Выберем K ещё и так, чтобы выполнялось $1/n_k < \varepsilon$. Так как по построению при всех $k > K$ $|x_{n_k} - y_{n_k}| < 1/n_k$, то

$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < 2\varepsilon,$$

откуда следует, что подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже сходится к x_0, то есть пределы подпоследовательностей $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$при $k \to \infty$ совпадают. Но $x_0 \in [a, b]$ по предельному переходу в неравенствах, а тогда по условию функция f непрерывна в точке x_0. В силу определения по Гейне непрерывной функции при любом $\epsilon > 0$ $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ и $|f(y_{n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ при достаточно больших k. Если взять $\epsilon = \varepsilon_1$, то получим цепочку неравенств:

$$\varepsilon_1 > |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(y_{n_k}) - f(x_0)| \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_1.$$

Таким образом, приходим к противоречию с неравенством (1). □

Упражнение. Верно ли обратное: если функция f равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она непрерывна на этом отрезке? Следует ли из равномерной непрерывности функции на множестве непрерывность функции на этом множестве?

Существование и непрерывность обратной функции

Определение 2. *Пусть функция $f : E \to D$ осуществляет биекцию между E и D. Если каждому $y \in D$ поставить в соответствие то $x \in E$, для которого $f(x) = y$, то тем самым будет определена функция, отображающая множество D во множество E. Она называется **обратной** для функции f и обозначается f^{-1}. Таким образом, $f^{-1} : D \to E$.*

Пример 3. *1) Пусть $f(x) = x^2, E = [0, +\infty)$. Тогда $D = [0, +\infty)$. В следующей лекции будет определена обратная к f функция, которая встречалась в школьной программе, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, причём $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.*
2) Пусть снова $f(x) = x^2$, но $E = \mathbb{R}$. Тогда $D = [0, +\infty)$, но отображение f не биективно, поэтому обратной функции нет у f нет.

Теорема 2. *(**Критерий непрерывности монотонной функции**). Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция f, непрерывна на этом отрезке тогда и только тогда, когда множеством её значений является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.*

Перед доказательством отметим, что $f(a) \leq f(b)$, если f не убывает, и $f(a) \geq f(b)$, если f не возрастает.

Доказательство. **Необходимость.** Если $c \in [a, b]$, то $f(c)$ лежит между $f(a)$ и $f(b)$ в силу монотонности. По теореме Коши о непрерывной функции функция f принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Тем самым доказано, что область значения функции f – это отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Достаточность. Предположим, что функция f монотонна на отрезке $[a, b]$, область её значений – отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, но f имеет разрыв в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда по теореме о разрывах монотонной функции (см. предыдущую лекцию) у этой f может быть разрыв только первого рода, то есть если $x_0 \in (a, b)$, то в точке разрыва существуют левый и правый пределы, но они не равны между собой:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \neq B = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Один из интервалов $(A, f(x_0))$ или $(f(x_0), B)$ непуст, и в нём нет значений функции f. В силу монотонности функции f этот интервал содержится в отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, поэтому этот отрезок не входит целиком в область значений функции f. Если же $x_0 = a$, то в этой точке существует правый предел, равный $B \neq f(a)$, а тогда интервал $(f(a), B)$ не содержит ни одного значения функции f. Случай $x_0 = b$, разбирается аналогично, только теперь в точке x_0 существует левый предел $A \neq f(b)$. В любом из случаев получаем противоречие с тем, что область значений функции является отрезком. $\square$

Теорема 3. *(**Теорема об обратной функции**). Пусть функция f непрерывна и строго монотонна (то есть возрастает или убывает) на отрезке $[a,b]$. Тогда функция f имеет обратную функцию f^{-1}, определенную на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, причём f^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$ и характер монотонности функций f и f^{-1} одинаковый.*

Доказательство. То, что образом функции f является отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$, сразу следует из предыдущей теоремы, то есть f является сюръекцией отрезка $[a,b]$ на отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Инъекция вытекает из строгой монотонности: двум разным значениям функции соответствуют два разных значения аргумента. Таким образом, f является биекцией, поэтому обратная функция f^{-1} существует по определению.

Монотонность функции f^{-1} следует из того, что если, например, f возрастает, то $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 < x_2$, то есть f^{-1} тоже возрастает, и аналогично для убывания. По определению, функция f^{-1} определена на отрезке с концами $f(a)$ и $f(b)$, а областью её значений является отрезок $[a,b]$, поэтому функция f^{-1} непрерывна в силу предыдущей теоремы. $\square$

Многие элементарные функции (подробнее об этих функциях см. следующую лекцию) определяются с помощью этой теоремы. Некоторые примеры будут рассмотрены на следующей лекции.

Построение некоторых элементарных функций

1) y=arctg x. Мы не даём строгие определения функций $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$, так как для этого необходимо владение понятиями второго и третьего семестров. Однако для наших прикладных целей строгие определения этих функций и не нужны. Основных свойств этих функций, известных ещё из школьной программы, вполне достаточно для дальнейшего.

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. На этом интервале tg монотонен и непрерывен, а тогда эти свойства сохраняются для любого отрезка, содержащегося в этом интервале. В частности, на отрезке $[-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}]$ для тангенса выполнены все условия теоремы об обратной функции, поэтому определена и непрерывна функция f_n^{-1}, обратная к тангенсу на отрезке $[\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})]$. Очевидно, что при разных n функции f_n^{-1} совпадают на пересечениях соответствующих отрезков, а $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})] = \mathbb{R}$. На этом объединении получается функция, совпадающая с f_n^{-1} на каждом отрезке $[\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})]$. Она и является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$. Эта функция, как следует из построений выше и теоремы об обратной функции, определена на всей прямой, строго монотонна. Она обозначается arctg . Таким образом, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2) $y = a^x, a > 1$, $y = \log_a x$. Дадим лишь схему построения показательной функции. Доказательства утверждений можно найти, например, в первом томе книги В. А. Зорича "Математический анализ". Итак, мы считаем известным из школьного курса, что для $x \in \mathbb{Q}$ a^x корректно определено, $a^0 = 1$, а также для всех рациональных x и y $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ и $a^x < a^y$ если и только если $x < y$. Построение показательной функции базируется на двух утверждениях, которые приведём без доказательства.

Предложение 1. *При любом натуральном N для всех таких рациональных x и y, что $x, y \leq N$ найдётся такое число $C(N)$, что $|a^x - a^y| \leq C(N)|x - y|$.*

С помощью этого предложения доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *При $a > 1$, существует единственная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, совпадающая с $x \mapsto a^x$ при $x \in \mathbb{Q}$.*

Построенную в теореме функцию называют показательной и обозначают

$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}.$$

В доказательстве выводится непрерывность показательной функции. Из непрерывности и свойств a^x для рациональных чисел получается следующее следствие.

Предложение 2. *При всех $x, y \in \mathbb{R}$ $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$ и $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.*

Таким образом, функция $x \mapsto a^x$ (это обозначение означает, что число x отображается в число a^x) строго монотонна, поэтому, как и для арктангенса, можно получить обратную к показательной функцию $x \mapsto \log_a x$, определенную для всех $x > 0$ и принимающую все вещественные значения. Логарифм также является непрерывной и строго монотонной функцией, что следует из теоремы об обратной функции.

Более подробно о построении элементарных функций см. 1 том книги В. А. Зорича, упоминавшейся выше.