Лекция 3

Предел последовательности

Мы переходим к изучению одного из самых важных понятий не только математического анализа, но и всей математики – понятия предела. В дальнейшем с помощью предела будут определены другие фундаментальные математические понятия, например производная и интеграл.

Определение 1. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любой окрестности точки A существует такое натуральное число N, что при всех натуральных $n > N$ числа a_n лежат в этой окрестности. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall U(A) \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ a_n \in U(A).$$

Более стандартным и чаще применяемым является следующее определение предела последовательности.

Определение 2. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного числа ε существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. На языке кванторов это определение запишется так:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Полезное упражнение: доказать равносильность обоих определений предела. Последовательность, имеющую предел, называют **сходящейся**.

Целой частью числа $x \in \mathbb{R}$ будем называть целое число k, удовлетворяющее неравенствам $k \leq x < k+1$. Число k будем обозначать $[x]$. Например, $[1,7] = 1$, $[-3,6] = -4$. Число $x - [x]$ будем называть *дробной частью числа* x и обозначать $\{x\}$.

Запишем также определение того, что число A не является пределом последовательности.

Определение 3. *Число A не является пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если найдётся такое положительное число ε, что для каждого натурального числа N существует такое натуральное $n > N$, что выполнено неравенство $|a_n - A| \geq \varepsilon$. На языке кванторов:*

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} : \exists n > N : |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Если это верно при всех вещественных A, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела.

Пример 1. *1) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Действительно, нужное неравенство запишется в виде $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому если взять $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, то при всех натуральных $n > N$ неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ выполняется, поэтому предел есть. Обратим внимание, что при доказательстве мы пользовались вторым определением предела. С помощью первого определения можно доказать так: возьмём правый конец интервала $U(0)$ (пусть это число b) и выберем n так, чтобы выполнялось неравенство $n > \left[\frac{1}{b}\right] + 1$ (это возможно в силу аксиомы Архимеда) Тогда при всех таких n имеем $0 < 1/n < b$, то есть все элементы последовательности принадлежат окрестности $U(0)$.*

2) Последовательность $b_n = (-1)^n$ не имеет предела. Действительно, никакие два элемента этой последовательности с номерами k и $k+1$ не лежат в интервале, длина которого меньше 2, поэтому не выполнено первое определение. Для доказательства по второму определению предположим противное: пусть B – предел этой последовательности. Тогда для $\varepsilon = 1/2$ найдутся достаточно большие n, при которых $|b_n - B| < 1/2$ и $|a_{n+1} - B| < 1/2$. Тогда из неравенства треугольника следует, что $2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - B| + |a_{n+1} - B| < 1$, то есть приходим к противоречию.

Свойства пределов

Докажем, что определение предела корректно, то есть, что если предел последовательности существует, то он единственен.

Предложение 1. *Пусть у последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел. Тогда этот предел единственен.*

Доказательство. От противного: пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = B,\ A \neq B.$$

Тогда $|A - B| = \varepsilon_0 > 0$. По определению предела для $\varepsilon_0/2$ найдётся такой номер $N_1 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_1$ имеем $|a_n - A| < \varepsilon_0/2$. Для этого же $\varepsilon_0/2$ найдётся такой номер $N_2 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N_2$ имеем $|a_n - B| < \varepsilon_0/2$. Тогда при $n > \max\{N_1, N_2\}$, применяя неравенство треугольника, получим

$$\varepsilon_0 = |A - B| = |A - a_n + a_n - B| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Противоречие. □

Определение 4. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существуют такие числа $c, C \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Равносильным определением будет следующее: последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ называется ограниченной, если существует такое число $M > 0$, что $|a_n| \leq M$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Предложение 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Обозначим нашу последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и положим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда из определения предела следует, что для $\varepsilon = 1$ при всех натуральных n, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$, выполнено неравенство $|a_n - A| < 1$, которое при раскрытии модуля можно записать так: $A - 1 < a_n < A + 1$. Это значит, что при всех натуральных $n > N$ последовательность $\{a_n\}_{n=N+1}^{+\infty}$ ограничена.

Элементов, не входящих в эту последовательность, лишь конечное число: $a_1, a_2, ..., a_N$. Если теперь мы выберем максимальное из чисел $|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, ...|A-1|$ и $|A+1|$, и обозначим это максимальное значение через M, то уже для всех элементов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ будет выполнено неравенство $|a_n| \leq M$, чем и доказана ограниченность. □

Легкое упражнение: убедитесь, что обратное неверно, то есть из ограниченности последовательности вовсе не вытекает, что эта последовательность сходится.

Предложение 3. *(**Лемма об отделимости**). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $A \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ выполнено неравенство $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.*

Замечание. Это предложение о том, что если предел последовательности не равен нулю, то, начиная с некоторого номера, все элементы последовательности не просто не равны нулю, а отделены от него некоторым числом (откуда и название: лемма об отделимости). Другими словами, среди элементов последовательности не может найтись сколь угодно малых, а поэтому числа $1/a_n$ не могут быть по модулю больше некоторой фиксированной величины.

Доказательство. В определении предела возьмём $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Для этого ε по определению найдётся такое натуральное число N, что при всех $n > N\left(\frac{|A|}{2}\right)$ будет верно неравенство $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. По неравенству, вытекающему из неравенства треугольника (см. лекцию 1) имеем $|A| - |a_n| \leq |a_n - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A| - \frac{|A|}{2} < |a_n| \Leftrightarrow \frac{|A|}{2} < |a_n|$. Таким образом, при $N = N\left(\frac{|A|}{2}\right)$ требуемое неравенство выполнено. □

С помощью определения предела через окрестности можно провести доказательство чуть проще: возьмём (в случае $A > 0$) интервал $\left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right)$. Начиная с некоторого номера, все элементы последовательности лежат в этом интервале, то есть все они больше, чем $A/2$. Если $A < 0$, то проведите доказательство сами.

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы о свойствах пределов последовательностей.

Теорема 1. ***(Арифметика пределов)****. Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. *Тогда:*
1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \beta \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha A + \beta B$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$;
3) если $B \neq 0$, $b_n \neq 0$ *при всех натуральных* n, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательство. Из определения следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \ \exists N_2 : \ \forall n > N_1 \ |a_n - A| < \varepsilon \text{ и } \forall n > N_2 \ |b_n - B| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ одновременно $|a_n - A| < \varepsilon$ и $|b_n - B| < \varepsilon$.

Теперь в пункте 1) получаем с помощью неравенства треугольника при всех $n > N$: $|\alpha a_n + \beta b_n - \alpha A - \beta B| \leq |\alpha(a_n - A)| + |\beta(b_n - B)| < (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$. Так как α и β – фиксированные числа по условию, а ε мы можем выбрать сколь угодно малым, то из полученного неравенства вытекает справедливость первого пункта.

В пункте 2 получим при всех $n > N$:

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| < |b_n|\varepsilon + |A|\varepsilon < (M + |A|)\varepsilon.$$

Здесь число M взято из следующих соображений: последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ имеет предел по условию, поэтому, согласно предложению 2, ограничена, а тогда из определения ограниченности следует существование такого числа $M > 0$, что при всех натуральных n $|b_n| < M$. Итак, снова A и M фиксированы, а $\varepsilon > 0$ можно взять любым. Из этого следует справедливость пункта 2.

Пункт 3 сведём к пункту 2, пользуясь условием доказываемой теоремы и леммой об отделимости. Мы имеем равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)$, поэтому если будет доказано, что у последовательности $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ есть предел, то получим, в силу пункта 2, что он есть и у произведения $a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Мы докажем даже более сильный факт: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$. Действительно, при всех $n > N$ имеем, как было написано в начале доказательства, $|b_n - B| < \varepsilon$; справедливо также равенство $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{|B-b_n|}{|B||b_n|}$. Вспоминая, что по лемме отделимости найдётся такое натуральное число N_3, что $|b_n| > \frac{|B|}{2}$, и беря $L = \max\{N, N_3\}$, будем иметь при всех $n > L$: $\frac{|B-b_n|}{|B||b_n|} < \frac{|B-b_n|}{|B||\frac{B}{2}|} < \frac{2}{|B|^2}\varepsilon$. (Важно осознать, почему цепочка неравенств справедлива!) Таким образом, в силу произвольности ε, мы доказали справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$. Теперь к последовательностям $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{\frac{1}{b_n}\}_{n=1}^{+\infty}$ остаётся применить пункт 2, и третий пункт доказан. $\square$

В доказанной теореме важным является условие существования пределов каждой из последовательностей. Если одна из последовательностей имеет предел, а вторая – нет, то сумма этих последовательностей уже не будет иметь предела (проверьте!). Однако, как показывает следующий пример, возможна ситуация, когда обе последовательности не имеют предела, а их сумма будет иметь предел.

Пример 2. *Пусть* $a_n = (-1)^n + 1/n, b_n = (-1)^{n+1}$. *Тогда* $|a_n - a_{n+1}| > 1, |b_n - b_{n+1}| > 1$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$, *поэтому ни одна из этих последовательностей не сходится. При этом* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Самостоятельно приведите соответствующие примеры для произведения и частного последовательностей.

Предложение 4. ***(Переход к пределу в неравенстве)****. Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ и } \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

а также существует такое натуральное n_0, *что* $a_n \le b_n$ *при всех* $n > n_0$. *Тогда* $A \le B$.

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть $A > B$. Возьмём две непересекающиеся окрестности $U(A)$ и $V(B)$. Начиная с некоторого номера N, все элементы последовательности $\{a_n\}$ лежат в $U(A)$, а элементы последовательности $\{b_n\}$ – в $V(B)$. Тогда $a_n > b_n$ при всех $n > N$. Получено противоречие. $\square$

Контрольный вопрос: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, а также существует такое натуральное n_0, что $a_n < b_n$ при всех $n > n_0$. Верно ли, что $A < B$? (Ответ: нет. Например, $a_n = 0$ при всех n, а $b_n = 1/n$).

Сейчас мы сформулируем и докажем лемму, позволяющую в некоторых случаях эффективно находить пределы.

Теорема 2. ***(Лемма о зажатом пределе)****. Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$ *и* $a_n \le c_n \le b_n$, *начиная с некоторого натурального* n. *Тогда* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Доказательство. Из определения следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \text{ и } \exists N_2 : \forall n > N_1\ |a_n - A| < \varepsilon \text{ и } \forall n > N_2\ |b_n - A| < \varepsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n > N$ одновременно $|a_n - A| < \varepsilon$ и $|b_n - A| < \varepsilon$, поэтому

$$A - \varepsilon \le a_n \le c_n \le b_n < A + \varepsilon$$

при всех $n > N$, то есть $|c_n - A| < \varepsilon$, поэтому выполнено определение предела для последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$