механико-математический и химический
факультеты МГУ имени М.В.Ломоносова
междисциплинарные научно-образовательные
школы МГУ

Аналитическая геометрия

А.И. Козко, В.Г. Чирский

2023

Рекомендовано методической комиссией химического факультета и кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в качестве учебного пособия для студентов.

Аналитическая геометрия.

Артём Иванович Козко,
Владимир Григорьевич Чирский.

Книга предназначена для старшеклассников, преподавателей математики, студентов и аспирантов университетов и всех лиц, заинтересованных в глубоком изучении многообразия идей, лежащих в основе аналитической геометрии.

Оглавление

Введение.

В современном мире компьютерные технологии внедрены практически во все научные и прикладные исследования. В свою очередь, это вызывает бурное развитие математических дисциплин, поскольку многие из математических дисциплин имеют важное прикладное значение и являются основой компьютерных технологий.

Для правильного и эффективного использования многих математических программ требуется умение сформулировать задачи, возникающие в процессе исследования математической модели изучаемого явления, выбрать подходящий алгоритм решения, осмыслить полученный результат. Для этого требуется достаточный уровень математической подготовки.

В серии методических разработок «математика для современной химии» в рамках проекта «Междисциплинарные научно-образовательные школы МГУ» рассматриваются вопросы, усвоение которых способствует повышению математической культуры учащихся, развитию их профессиональных компетенций. Выбор тем разработок не случаен. Он основан на методических исследованиях кафедры математического анализа, на учёте мнений кафедр химического факультета, на анализе результатов экзаменов.

Важная цель этих разработок — облегчить самостоятельную работу студентов и способствовать успешной сдаче экзаменов и зачётов.

В этом пособии содержится материал курса лекций по аналитической геометрии, читаемого студентам первого курса химического факультета МГУ.

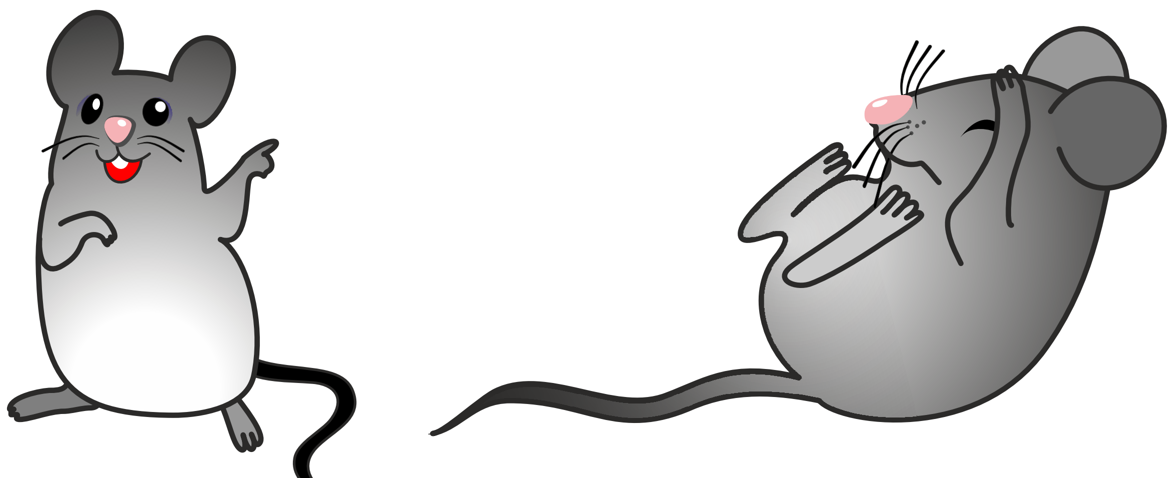


Рис. 1:

Глава 1

Начальные сведения. Матрицы. Определители

1.1 Введение

1.1.1 Числовая ось

Произвольная прямая имеет два противоположных направления. Выберем одно из них и назовём его положительным направлением, а противоположное ему назовём отрицательным направлением. Прямую с выбранными направлениями назовём осью. Рассмотрим ось и выберем масштаб (т.е. отрезок, длину которого считаем равной единице). В курсе математического анализа будет установлено, что при этом любой отрезок будет можно измерить и что полученная при измерении длина представляет собой действительное(синоним - вещественное) число. Выберем на оси точки A и B и рассмотрим соединяющий эти точки отрезок оси. Если мы укажем, например, что точка A — начало отрезка, а точка B — его конец, то этот отрезок направленный, а его направление — от начала к концу отрезка. Направленный отрезок обычно обозначают $\overrightarrow{AB}$. Введём важное для дальнейшего понятие величины направленного отрезка. Величиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называют его длину со знаком «+», если направление отрезка совпадает с направлением оси и его дину со знаком « - », если направление отрезка противоположно направлению оси. Будем обозначать величину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ символом AB, а его длину символом $|\overrightarrow{AB}|$. Имеют место равенства:

$$AB = -BA, \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = |AB| = |BA|.$$

Чтобы избежать путаницы в дальнейшем, отметим очевидное равенство $|\overrightarrow{AB}| = |AB|$, в левой части которого стоит длина отрезка $|\overrightarrow{AB}|$, а в правой части — абсолютная величина числа, равного величине этого отрезка. Перейдём к понятиям числовой оси и координаты точки на этой оси. Рассмотрим ось и зафиксируем на ней любую точку, которую назовём началом координат и обозначим буквой O. Тогда координатой точки M, лежащей на оси, назовём величину OM отрезка $|\overrightarrow{OM}|$. Координата самой точки O равна 0. Ось с выбранными масштабом и началом координат называется числовой осью. Если точка M_1 имеет координату x_1, а точка M_2 имеет координату x_2, то

$$M_1M_2 = x_2 - x_1, \quad |\overrightarrow{M_1M_2}| = |x_2 - x_1|.$$

Любая точка M, лежащая на числовой оси, имеет координату, представляющую собой некоторое действительное число и любое действительное число является координатой некоторой точки оси. Иными словами, действительные числа и точки числовой оси находятся во взаимно-однозначном соответствии. На первый взгляд, это утверждение очевидно. Однако в курсе математического анализа оно будет доказано. Причина в том, что для эффективного использования математических методов требуется большой уровень строгости в рассуждениях.

1.1.2 Координаты на плоскости и в пространстве

Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек на плоскости или в пространстве заданием совокупности чисел, то можно сказать, что введена некоторая система координат. Наиболее часто встречается прямоугольная декартова система координат на плоскости. Для введения этой системы координат требуется задать масштаб и выбрать две взаимно перпендикулярные числовые оси, занумерованные в некотором порядке. Точка пересечения этих осей называется началом координат, сами оси — координатными осями, причём первая из них называется осью абсцисс, а вторая — осью ординат. Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — символом Ox, ось ординат — символом Oy. Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведём через неё перпендикуляры к осям Ox и Oy. Основания этих перпендикуляров обозначим M_x и M_y. Координатами точки в заданной системе координат называются числа $x = OM_x$, $y = OM_y$ т.е. x — координата точки M_x на оси Ox, а y — координата точки M_y на оси Oy. То, что точка M имеет координаты x, y записываем так: $M(x, y)$. Например, $O(0, 0)$.

Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

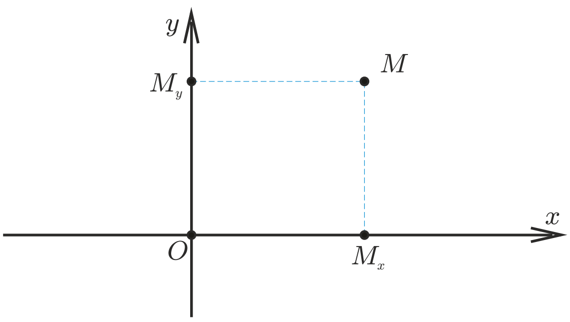


Рис. 1.1:

Вполне аналогично вводится прямоугольная декартова система координат в пространстве. Для введения этой системы координат требуется задать масштаб и выбрать три взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в одной точке, занумерованные в некотором порядке. Точка пересечения этих осей называется началом координат, сами оси — координатными осями, причём первая из них называется осью абсцисс, вторая — осью ординат, третья — осью аппликат. Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — символом Ox, ось ординат — символом Oy, ось аппликат — символом Oz. Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведём через неё перпендикуляры к осям Ox, Oy, Oz. Основания этих перпендикуляров обозначим M_x, M_y, M_z. Координатами точки в заданной системе координат называются числа $x = OM_x$, $y = OM_y$, $z = OM_z$, т.е. x — координата точки M_x на оси Ox, y — координата точки M_y на оси Oy и z — координата точки M_z на оси Oz. То, что точка M имеет координаты x, y, z, записываем так: $M(x, y, z)$. Например, $O(0, 0, 0)$. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле:

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

1.1.3 Уравнение линии на плоскости. Уравнение поверхности. Уравнения линии в пространстве

Методами элементарной геометрии исследовались прямая, окружность, ломаные линии на плоскости, соответственно, плоскость, сфера, цилиндр и конус в пространстве. Однако во многих задачах математики и её приложений приходится исследовать свойства различных других линий и поверхностей.

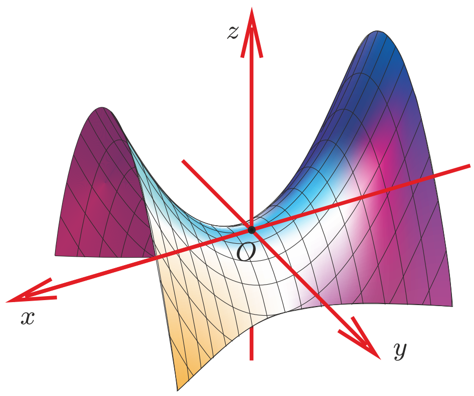


Рис. 1.2: Поверхность $x^2 - y^2 - z = 0$.

Общий подход к решению таких задач, дающий основу методам аналитической геометрии, состоит в том, что рассматриваемые линии и поверхности исследуются при помощи анализа уравнений, которым удовлетворяют точки этих линий или поверхностей. Рассмотрим сначала линии на плоскости, на которой введена прямоугольная декартова система координат. Уравнением данной линии называется такое уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x, y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты точек, на этой линии не лежащих. Иными словами, линия — геометрическое место точек плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат. Уравнением данной поверхности называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты x, y, z каждой точки этой поверхности и не удовлетворяют координаты точек, на этой поверхности не лежащих. Иными словами, поверхность — геометрическое место точек пространства, координаты x, y, z которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$. В пространственной аналитической геометрии линия обычно задаётся, как пересечение двух поверхностей, поэтому её можно считать геометрическим местом точек, координаты x, y, z которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

где $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ — уравнения этих поверхностей.

Контрольные вопросы.

1. В чём отличие величины отрезка AB от длины отрезка $|\overrightarrow{AB}|$?
2. Зададим множество $G \subset \mathbb{R}^3$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\, ;\, x^2 + y^4 + z^8 = 0\}$. Что из себя представляет множество G? Является ли данное множество поверхностью?

Упражнения к 1.1.1

Упражнение 1.1.1. *Найдите расстояние между точками* $M_1(1, 2, 3, 0)$ *и* $M_2(0, 1, 2, \sqrt{6})$.

Ответы: 1.1.1 3.

1.2 Системы линейных уравнений. Векторы и матрицы

1.2.1 Системы линейных уравнений, введение в теорию

Как установлено выше, линии на плоскости, поверхности и линии в пространстве задаются либо уравнениями вида $F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$, либо системами уравнений такого вида.

Наиболее простой случай, когда рассматриваемые уравнения — линейные, т.е имеют вид $Ax+By+C = 0$ или $Ax + By + Cz + D = 0$, где x, y, соответственно, x, y, z — переменные, а A, B, C, D — постоянные коэффициенты.

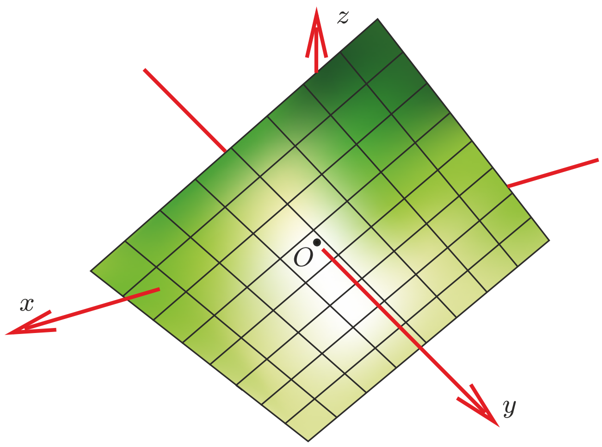


Рис. 1.3: $Ax + By + Cz + D = 0$.

В том, что геометрическими местами точек, координаты которых удовлетворяют указанным уравнениям, являются прямая на плоскости и плоскость в пространстве, убедимся позже. Пока мы сосредоточим свои усилия на исследовании свойств решений систем таких (и подобных) уравнений. Системы линейных уравнений представляют собой математические модели многих актуальных задач естественных и социальных наук. Например, решая задачи про окислительно-восстановительные реакции, Вы уже сталкивались с подобными системами уравнений.

Нам предстоит развить интересную математическую теорию. Мы будем внимательно следить за переходом от поставленной задачи к последовательным этапам её решения, обсуждать предпринимаемые шаги, вводимые вспомогательные понятия и т.д. Этот процесс очень полезен для повышения уровня математической культуры, необходимой для творческого применения Вами математических методов.

Изложение начнём ... с цитаты из книги [1] академика В.И.Арнольда: "Существует два основных способа ставить задачу: французский способ состоит в том, чтобы сформулировать вопрос наиболее общим образом, т.е. так, чтобы его нельзя было бы далее обобщить без потери смысла, в то время как русский способ состоит в том, чтобы сформулировать его в том простейшем случае, который нельзя далее упростить, не лишая вопрос его основного содержания."

Начнём использовать французский способ. Что можно обобщать? Во-первых, можно спросить себя, почему мы ограничиваемся только переменными x, y, z? Во многих реальных задачах переменных больше. А сколько их? Неизвестное a priori число, которое мы обозначим n. В приведённых выше примерах линейных уравнений число n равно 2 и 3, соответственно. В общем случае будем рассматривать линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - b = 0$. А сколько следует рассматривать уравнений? Рассуждая «по французски» — неизвестное заранее число, которое обозначим m. В итоге получаем систему уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

В этой системе $x_1, \cdots, x_n$ — искомые величины, а числа $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m$ — заданные коэффициенты системы. Систему (1.2.1) общего вида будем изучать в следующем семестре, в курсе линейной алгебры. В курсе аналитической геометрии числа m, n не больше 5. Это связано с тем, что точка с двумя координатами (x_1, x_2) — это точка плоскости, а точка с тремя координатами (x_1, x_2, x_3) — это точка пространства. Поэтому установленным свойствам решений системы можно будет дать наглядную геометрическую интерпретацию.

Впрочем, в изложении курса аналитической геометрии часто будут делаться «взгляды в будущее» и рассматриваться объекты курса линейной алгебры, которые хотя и не имеют непосредственной геометрической трактовки (например, точки $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства n измерений), но представляют собой обобщения интуитивно ясных, наглядных понятий. Возвратимся к системе (1.2.1). На первый взгляд, её легко решить, последовательно исключая неизвестные (это — метод Гаусса). Решена ли наша задача? Кажется, решена. Указан способ, в принципе позволяющий исследовать любую систему такого вида. Но — встанем на позицию критика. Записать, при произвольных размерах системы, условие разрешимости этой системы и дать формулу для её решений — совсем не просто. Поэтому давайте продолжим наши рассмотрения и постараемся понять, что же мы хотим получить? Пришло время использовать русский подход (см. цитату выше) и максимально упростить систему (1.2.1), сведя её, при $m = n = 1$, к одному уравнению

$$ax = b.$$

Если $a \neq 0$, то $x = b/a$, или

$$x = a^{-1}b.$$

Если же $a = 0$, но $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ принимает вид $0 \cdot x = b$, а это уравнение не имеет решений. Если же $a = 0$, $b = 0$, то уравнение $ax = b$ сводится к равенству $0x = 0$, верному при любом x. Поставим перед собой задачу записать систему (1.2.1) в виде, похожем на уравнение $ax = b$, а также получить для решений системы формулу, подобную равенству $x = a^{-1}b$.

1.2.2 Векторы-столбцы

Начнём упрощать систему (1.2.1) произвольных размеров. Разные уравнения этой системы содержат одни и те же переменные $x_1, \ldots, x_n$. Эти переменные можно рассматривать, как коэффициенты при новых объектах, которые мы будем называть векторами-столбцами и которые имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Мы ввели в рассмотрение новые объекты и должны описать их простейшие свойства. Прежде всего следует выяснить, когда объекты

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

равны между собой? Будем считать, что векторы-столбцы $\vec{a}$, $\vec{b}$ равны между собой тогда и только тогда, когда выполнены равенства $a_k = b_k$, $k = 1, \ldots, m$. Определим сумму векторов–столбцов естественным образом:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}.$$

Произведение числа α на вектор-столбец $\vec{a}$ определим равенством

$$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_m \end{pmatrix}.$$

Используя введённые определения, легко проверить равенства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$, где $\vec{0}$ — вектор столбец, состоящий из m нулей.

4. Для любого вектора-столбца $\vec{a}$ существует единственный вектор-столбец $-\vec{a}$ такой, что выполнено равенство $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$.

5. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

6. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

7. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

8. $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

9. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

С учётом определений и установленных равенств, преобразуем систему (1.2.1) к уравнению

$$x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}, \tag{1.2.2}$$

в котором

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение 1.2.1. Выражение $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \dots, x_n$.

Замечание 1.

- Таким образом, задача о возможности представить вектор $\vec{b}$ в виде линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_n$ сводится к системе линейных уравнений (1.2.1).
- Точно так же, как векторы столбцы, можно рассматривать и векторы-строки $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)$, с аналогичными определениями равенства векторов, суммы векторов, произведения числа на вектор и с теми же самыми свойствами этих операций.

1.2.3 Матрицы. Краткая запись системы уравнений

Уравнение (1.2.2) не совсем похоже на уравнение $ax = b$. Для того, чтобы добиться полного сходства, следует заменить набор чисел $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ каким-то одним объектом. Так как сама система (1.2.1) изображена в виде таблицы, естественно рассмотреть таблицу, составленную из коэффициентов системы, расположенных так же, как они расположены в системе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта таблица называется *матрицей системы*. Эта матрица имеет m строк, строка с номером k представляет собой набор чисел $a_{k1}, \dots, a_{kn}$, и n столбцов, перечисленных выше $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$. Будем говорить, что матрица A имеет размер $m \times n$.

Как и в предыдущем пункте, следует выяснить простейшие свойства новых объектов — матриц. Будем говорить, что матрица A размера $m \times n$ равна матрице В такого же размера

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

тогда и только тогда, когда для всех $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ выполнены равенства $a_{kj} = b_{kj}$. Отметим, что говорить о равенстве матриц, имеющих различные размеры, лишено смысла.

Определим сумму матриц A и B одинакового размера равенством

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

и произведение числа α на матрицу A равенством

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используя определение суммы матриц и произведения матрицы на число, легко установить, операции над матрицами обладают теми же свойствами, что и операции над векторами:

1. $A + B = B + A$.

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

3. $A + 0 = 0 + A$, где 0 — нулевая матрица размера $m \times n$, т.е. $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

4. Для любой матрицы A существует матрица $(-A)$, такая, что $A + (-A) = 0$, $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$.

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

7. $1 \cdot A = A$.

8. $0 \cdot A = 0$.

9. $\alpha \cdot 0 = 0$.

Следует отметить, что в левой части равенства 8 символ 0 обозначает число ноль, а в правой его части, равно как и всюду в равенстве 9, этот символ обозначает нулевую матрицу. Использование одного и того же символа 0 для обозначения разных объектов, как правило, не вызывает недоразумений. Там, где это будет необходимо, будет специально оговорено, что этот символ 0 обозначает.

Введённые операции пока не позволяют получить для системы (1.2.1) краткую запись, подобную $ax = b$. Определим операцию умножения A размера $m \times n$ на вектор-столбец $\vec{x}$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ равенством

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Результатом этой операции является вектор–столбец с m координатами. Тогда, ввиду определения равенства векторов, система (1.2.1) равносильна равенству векторов-столбцов, имеющему вид

$$Ax = b. \tag{1.2.3}$$

Уравнение (1.2.3) вполне похоже на уравнение (1.2.1).

Таким образом, часть поставленной задачи успешно решена.

1.2.4 Произведение матриц. Единичная матрица. Обратная матрица

Рассмотренную в предыдущем пункте операцию умножения матрицы на вектор легко обобщить и определить произведение матрицы размера $m \times n$ на матрицу размера $n \times k$. Пусть задана матрица A размером $m \times n$ и матрица B размера $n \times k$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Определим их произведение $AB = A \cdot B$, как матрицу C размера $m \times k$, элементы которой определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sl} = a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, k. \tag{1.2.4}$$

Это равенство означает, что столбец с номером j матрицы AB представляет собой произведение матрицы A на столбец с номером j матрицы B. Операция произведения матриц обладает свойствами:

- $A(BC) = (AB)C$, если A имеет размер $m \times n$, B имеет размер $n \times k$, C имеет размер $k \times p$.
- $A(B + C) = AB + AC$, если A имеет размер $m \times k$, B, C имеют размер $k \times n$.

Равенство $AB = BA$ в общем случае неверно. Например, если A имеет размер $m \times n$, B имеет размер $l \times k$ и $n \neq l$, то матрица BA просто не определена. Если же определены оба произведения AB, BA и выполнено равенство $AB = BA$, то говорят, что матрицы A, B коммутируют. Напомним, что действительное число 1 обладает тем свойством, что для любого числа a справедливы равенства $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. По аналогии, следует определить единичную матрицу E как матрицу, для которой для любой матрицы A выполнены равенства $AE = EA = A$. Однако, если A имеет размер $m \times n$, $m \neq n$, то эти равенства невозможны ни для какой матрицы E. Действительно, если определена матрица AE и $AE = A$, то матрица E должна иметь размер $n \times n$, если определена матрица EA и $EA = A$ то матрица E должна иметь размер $m \times m$ и равенство $AE = EA = A$ невозможно. Таким образом, далее мы рассматриваем квадратные матрицы размера $n \times n$. Назовём *единичной* матрицей размера $n \times n$ матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой на главной диагонали стоят 1, а все остальные элементы равны 0. Напомним, что для действительного числа $a \neq 0$ существует число a^{-1} такое, что $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. По аналогии, определим для квадратной матрицы A обратную матрицу A^{-1} условием $A^{-1}\ A = AA^{-1} = E$. Вопрос, при каких условиях обратная матрица существует, будет подробно рассмотрен позже. Отметим лишь, забегая вперёд, что условию $a \neq 0$, необходимому и достаточному для существования числа a^{-1}, соответствует условие отличия от нуля определителя рассматриваемой матрицы. Что такое определитель матрицы, будет рассказано далее.

Контрольные вопросы.

1. Верно ли равенство $AB = BA$ для квадратных матриц размера 2×2? Если нет, привести пример. Если да, то доказать.
2. Существует ли матрица A размера 2×2 и 3×3, отличная от нулевой что $A^3 = 0$?

Упражнения к 1.2

Упражнение 1.2.1. *Найдите матрицу обратную к матрице* $-E$.

Упражнение 1.2.2. *Пусть матрица* A *размера* 3×3 *такова, что* $A^4 = 0$. *Найдите матрицу обратную к* $E + A + A^2 + A^3$.

Ответы: 1.2.1 $-E$. **1.2.1** $E - A$.

1.3 Решение систем линейных уравнений в случае $m \leqslant 3$, $n \leqslant 3$

1.3.1 Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Будем решать её, исключая неизвестные. Если умножить первое из уравнений (1.3.5) на число a_{21}, а второе уравнение на число a_{11} и вычесть из второго полученного при этом уравнения первое, то придём к уравнению

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \tag{1.3.6}$$

являющемуся следствием этой системы. При условии

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \tag{1.3.7}$$

получаем

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Подставляя найденное значение x_2 в первое из уравнений (1.3.5), получаем

$$a_{11}x_1 = \frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Подстановка значения x_2 во второе из уравнений (1.3.5) даёт

$$a_{21}x_1 = \frac{(a_{22}b_1 - a_{12}b_2)a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Из условия (1.3.7) следует, что хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{21} не равно 0, поэтому из предыдущих равенств следует, что

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Если условие (1.3.7) не выполнено и при этом $b_2a_{11} - b_1a_{21} \neq 0$, то уравнение (1.3.6) принимает вид противоречивого равенства и, следовательно, не имеет решений. Поэтому не имеет решений исходная система (1.3.5). Если же (1.3.7) не выполнено и

$$b_2a_{11} - b_1a_{22} = 0,$$

то уравнение (1.3.6) принимает вид $0 \cdot x_2 = 0$ и ему удовлетворяет любое значение x_2. Легко проверить, что условия $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ и (3.8) можно переписать в виде

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2},$$

при соглашении о том, что если знаменатель какой-то из дробей равен 0, то равенство означает, что и числитель этой дроби равен 0. Это значит, что коэффициенты уравнений системы (1.3.5) пропорциональны и одно из уравнений системы лишнее, оно — следствие другого. Следовательно можно исключить одно из уравнений, а при подстановке любого значения x_2 из него можно найти соответствующее значение x_1.

Итак, мы получили, что при условии (1.3.7) система имеет единственное решение, а если это условие не выполнено, то система имеет бесконечное множество решений, либо вовсе не имеет решений. Таким образом, величина $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ играет решающую роль. Её называют *определителем* матрицы системы.

Определение 1.3.1. Для *определителя* квадратной матрицы размера 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

используются обозначения $|A|$ или $\det A$, при этом

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

В матричной записи система (1.3.5) принимает вид $A\vec{x} = \vec{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Так как имеют место равенства

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

формулы на x_1 и x_2, при условии (1.3.7), можно переписать в виде

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Полученные формулы называют *правилом Крамера* для системы (1.3.5).

1.3.2 Решение системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

В случае системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.3.8}$$

можно тоже использовать метод Гаусса последовательного исключения неизвестных. Отметим, что среди чисел a_{11}, a_{21}, a_{31} хотя бы одно отлично от 0, иначе переменная x_1 просто не входит в систему, а мы рассматриваем системы с тремя неизвестными. Можно считать, что $a_{11} \neq 0$, так как в противном можно переставить местами уравнения системы. Тогда можно вычесть из второго уравнения системы (1.3.8) её первое уравнение, умноженное на число a_{21}/a_{11}, а из третьего уравнения — первое, умноженное на a_{31}/a_{11}. К полученным в результате уравнениям применим метод решения из предыдущего пункта (получилась система двух уравнений с двумя неизвестными x_2, x_3). Подставив найденные значения переменных x_2, x_3 в первое уравнение, найдём значение x_1. Описанный процесс даст единственное решение системы (1.3.8), если в результате исключения переменных, например, x_1, x_2, получим уравнение вида $Kx_3 = L$, в котором $K \neq 0$. Можно проверить (сделайте это самостоятельно в качестве упражнения), что это число K выражается через коэффициенты системы (1.3.8) следующим образом:

$$K = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Правая часть полученнного выражения имеет для системы (1.3.8) тот же смысл, что величина $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = |A|$ для системы (1.3.5). Естественно, что её называют *определителем* матрицы системы (1.3.8) и обозначают $|A|$ или $\det A$. Итак,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение определителя матрицы размера 2×2 и 3×3.
2. Сколько решений у уравнения $\begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$? Выпишите все решения.

Упражнения к 1.3

Упражнение 1.3.1. *Найдите определители матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1.3.1 $|A| = 20$, $|B| = 0$.

1.4 Определители

1.4.1 Выражение определителя через его коэффициенты

Выражения для определителей матриц второго и третьего порядка, на первый взгляд, совсем не похожи друг на друга. Однако при более внимательном их рассмотрении можно заметить, что как величина $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, так и величина $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ имеют определённые закономерности строения. В каждом из этих произведений первыми номерами их сомножителей являются числа 1 и 2 (у элементов a_{11}, a_{12} первый номер равен 1, у элементов a_{21}, a_{22} первый номер равен 2), вторыми номерами — те же числа, но в разном порядке. Обратим внимание на то, что в каждом из произведений $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{31}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ первые номера сомножителей — это числа 1, 2, 3. Вторые номера — те же числа 1, 2, 3, переставленные местами. Ясно, что числа 1, 2 можно переставить двумя различными способами: 1, 2 и 2, 1. Рассмотрим перестановки чисел 1, 2, 3. На первое место можно поставить любое из них. Это даёт 3 возможности. Зафиксировав число на первом месте, имеем две возможности выбора числа на втором месте. При фиксированных двух числах на первом и втором месте остаётся лишь одна возможность поставить число на третье место. Итого имеем $3\cdot 2\cdot 1=6$ различных перестановок чисел 1, 2, 3. Рассуждая вполне аналогично, получаем, что имеется $n(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1=n!$ различных перестановок чисел 1, 2, ..., n. Перестановку чисел 1, 2, ..., n удобно обозначать так:

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \tau(1) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}, \tag{1.4.9}$$

где $\tau(1)$, ..., $\tau(n)$ — те же числа 1, 2, ..., n, но в другом порядке. Таким образом, любой член определителя второго порядка имеет вид $\pm a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}$, а любой член определителя третьего порядка имеет вид $\pm a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$. Перейдём к вопросу о том, как определить знак, с которым члены указанного вида входят в определитель.

Определение 1.4.1. Рассмотрим перестановку (1.4.9) и назовём *инверсией* пару чисел $\tau(i)$, $\tau(j)$ таких, что $i<j$, но $\tau(i)>\tau(j)$. Назовём перестановку (1.4.9) *чётной*, если в ней чётное число инверсий и *нечётной*, если число инверсий нечётное.

П р и м е р 1.4.1. Перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — нечётная с одной инверсией, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ — чётная перестановка с двумя инверсиями.

Заметим, что в величине $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ со знаком плюс стоит выражение $a_{11}a_{22}$, соответствующее чётной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (ноль инверсий), а со знаком минус стоит $a_{12}a_{21}$, соответствующее нечётной перестановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогично, в выражение $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ со знаком плюс входят выражения $a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, соответствующие чётным перестановкам

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а со знаком минус — выражения $a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, соответствующие нечётным перестановкам

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\sigma(\tau)=\begin{cases} 1, & \text{если } \tau \text{ — нечётная перестановка,} \\ 2, & \text{если } \tau \text{ — чётная перестановка.} \end{cases}$$

Таким образом, величина $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ представляет собой сумму величин вида $(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}$, взятую по всем перестановкам τ чисел 1, 2, а величина $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ представляет собой сумму величин вида $(-1)^{\sigma(\tau)}a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}a_{3\tau(3)}$, взятую по всем перестановкам τ чисел 1, 2, 3. Обобщая это наблюдение, положим, по определению, определитель квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

равным

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\tau} (-1)^{\sigma(\tau)} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \dots a_{n\tau(n)}, \tag{1.4.10}$$

где суммирование производится по всем перестановкам τ чисел 1, 2, ..., n.

1.4.2 Свойства определителей

Цель этого пункта — подготовить аппарат для получения формул, дающих явный вид решений системы (1.3.8) и даже более общей системы (1.2.1) в случае $m = n$. Для этого требуется исследование свойств определителей. Мы сформулируем их для квадратных матриц размера 3×3, но следует иметь в виду, что аналогичными свойствами обладают определители (1.4.10) квадратных матриц произвольного размера.

1.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.4.11}$$

Краткая запись этого равенства: $|A| = |A^T|$, где A^T обозначает так называемую *транспонированную матрицу*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что строками транспонированной квадратной матрицы являются столбцы исходной матрицы и наоборот. Это можно записать так: $a_{ij}^T = a_{ji}$ для всех i, j. Равенство (1.4.11) легко проверяется непосредственным вычислением. Оставляем проверку читателю.

Отметим, что свойство 1 определителей позволяет в дальнейшем переносить свойства, установленные для строк определителя, на его столбцы и наоборот.

2. Перестановка любых двух строк(столбцов) определителя приводит к изменеию его знака. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Эту формулу также легко проверить вычислением.

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то он равен нулю. Переставив местами одинаковые строки в определителе $|A|$, получаем равенство $|A| = -|A|$, поскольку при перестановке одинаковых строк определитель, с одной стороны, не меняется, а с другой стороны, по свойству 2, он меняет знак. Равенство $|A| = -|A|$ означает, что $|A| = 0$.

4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя. Действительно, равенство (1.4.10) означает, что каждый член разложения определителя содержит множителем ровно один элемент из каждой строки.

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны 0, то определитель равен 0. Достаточно вынести общий множитель, ноль, за знак определителя.

6. Если определитель имеет две пропорциональные строки (два пропорциональных столбца), то он равен нулю. Это сразу следует из свойств 4 и 3.

7.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Словами: если каждый элемент строки (столбца) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то исходный определитель равен сумме определителей, соответствующие строки которых состоят из этих слагаемых, а остальные элементы те же, что у исходного определителя. Замечание. Свойство 7 отнюдь не означает, что $|A + B| = |A| + |B|$. Последнее равенство в общем случае неверно.

8. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки(столбца), умноженные на одно и тоже число k, то определитель не изменится. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это сразу следует из свойств 6 и 7.

Контрольные вопросы.

1. Может ли определитель $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 9 & -9 \\ 2 & p & p-5 \end{pmatrix}$ быть положительным числом при некотором $p \in \mathbb{R}$?
2. Определите, является ли перестановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ чётной?

Упражнения к 1.4

Упражнение 1.4.1. *Найдите определители матриц* $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, A^T, $B = \begin{pmatrix} 5+2 & 4+3 & 2+7 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.4.2. *Определите количество инверсий перестановки* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы: 1.4.1 $|A| = |A^T| = 7$, $|B| = 0$. **1.4.2** $n(n-1)/2$.

1.5 Разложение определителя по строке (столбцу)

Выразим определитель третьего порядка через его коэффициенты и произведём группировку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Сделаем решающее наблюдение. Имеют место равенства

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определители, стоящие в правых частях равенств, получаются из исходного определителя удалением, соответственно, элементов первой строки и первого столбца, элементов первой строки и второго столбца, элементов первой строки и третьего столбца. Будем называть определитель, полученный из исходного определителя вычеркиванием всех элементов строки с номером i и столбца с номером j ***минором*** M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij}. Полученнные равенства означают, что

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \tag{1.5.12}$$

Определим *алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} равенством $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Тогда (1.5.12) можно переписать в виде

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Точно так же можно получить формулы:

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23},$$
$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Полученные равенства представляют собой разложения определителя по первой, второй и третьей строкам, соответственно.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$
$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$
$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$$

Последнии три равенства представляют собой разложения определителя по первому, второму и третьему столбцам, соответственно.

В общем случае для определителя $|A|$ матрицы порядка $n \times n$ справедливы формулы, называемые *теоремой Лапласа*:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Первая формула даёт разложение по строкам, вторая формулы — по столбцам.

Выразим теорему Лапласа словами:

Теорема 1.5.1. *Определитель равен сумме произведений элементов любой строки(столбца) на их алгебраические дополнения.*

Рассмотрим теперь имеющий две одинаковые строки и, следовательно,равный нулю определитель

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Алгебраические дополнения элементов его первой строки равны, соответственно

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

и совпадают с алгебраическими дополнениями элементов первой строки исходного определителя. Используя теорему Лапласа, получаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Точно так же доказываются равенства:

$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0,$$
$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0,$$
$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0,$$
$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0,$$
$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0,$$
$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0,$$
$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0,$$
$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = 0,$$
$$a_{13}A_{12} + a_{23}A_{22} + a_{33}A_{32} = 0,$$
$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0,$$
$$a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} + a_{32}A_{33} = 0.$$

полученные равенства означают, что сумма произведений элементов какой-либо строки(столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки(столбца) равнп0. Это верно для определителей квадратных матриц любого размера.

Замечание 2. При помощи символа Кронекера

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

полученные в данном параграфе равенства можно записать:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{kj} A_{nj} = \delta_{kn} \cdot |A|, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{ik} A_{in} = \delta_{kn} \cdot |A|.$$

Контрольные вопросы.

1. Чем отличается алгебраическое дополнение от минора матрицы?
2. Сформулируйте теорему Лапласа.

Упражнения к 1.5

Упражнение 1.5.1. *Найдите определители матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, *используя разложение по второй строке для матрицы* A *и разложение по второму столбцу для матрицы* B.

Ответы: 1.5.1 $|A| = 1$, $|B| = 0$.

1.6 Обратная матрица. Правила Крамера

1.6.1 Обратная матрица

Сначала сформулируем важное свойство определителей:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство этого свойства для матриц размера 2×2 и 3×3 — прекрасное упражнение для самостоятельной работы. Оно состоит в непосредственной проверке данного равенства, используя определение произведения матриц и свойства определителей.

Для матриц произвольного размера оно доказано в учебниках по линейной алгебре.

Определение 1.6.1. Назовём матрицу A^{-1} *обратной* для матрицы A, если выполнены равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{1.6.13}$$

Из равенств (1.6.13) следует, что обратную матрицу может иметь только квадратная матрица. Более того, не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу. Вопрос о существовании обратной матрицы и служит темой этого пункта. Отметим, что из равенств (1.6.13) и очевидного равенства $|E| = 1$ следует, что

$$1 = |E| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|.$$

Откуда следует, что если $|A| \neq 0$, то $|A^{-1}| = 1/|A|$. Таким образом, условие $|A| \neq 0$ является необходимым условием существования обратной матрицы. Следующая теорема означает, что это условие является необходимым и достаточным для существования обратной матрицы.

Теорема 1.6.2. *Если* $|A| \neq 0$, *то матрица* A *имеет обратную матрицу.*

Доказательство. Докажем, что матрица

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.6.14}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, является обратной матрицей для матрицы A. Для этого умножим матрицу (1.6.14) на матрицу A:

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31} & a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31} & a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31} \\ a_{11}A_{12}+a_{21}A_{22}+a_{31}A_{32} & a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} & a_{13}A_{12}+a_{23}A_{22}+a_{33}A_{32} \\ a_{11}A_{13}+a_{21}A_{23}+a_{31}A_{33} & a_{12}A_{13}+a_{22}A_{23}+a_{32}A_{33} & a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}$$

и используем равенства доказаные выше равенства, согласно которым матрица, стоящая в правой части равенства равна

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Проверка равенства

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

проводится вполне аналогично, с использованием доказаных ранее равенств. Таким образом, равенства (1.6.13) выполнены для матрицы (1.6.14) и, таким образом, эта матрица является обратной для матрицы A. □

1.6.2 Правила Крамера

Вернёмся к решению системы $A\vec{x} = \vec{b}$ в случае, когда $|A| \neq 0$. При этом, согласно теореме п.5.1, существует обратная для матрицы A матрица A^{-1}. Умножим обе части равенства $A\vec{x} = \vec{b}$ слева на матрицу A^{-1} и получим $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, или $E\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, или $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Рассмотрим произведение

$$A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что справедливы равенства

$$A_{11}b_1+A_{21}b_2+A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}b_1+A_{22}b_2+A_{32}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{13}b_1+A_{23}b_2+A_{33}b_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Откуда получаем

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Эти формулы и называют правилами Крамера решения системы линейных уравнений. Аналогичная теорема справедлива и для решения системы n уравнений с n неизвестными $A\vec{x} = \vec{b}$ в случае, когда $|A| \neq 0$. Координата решения x_i получается делением определителя, полученного из определителя исходной системы заменой в нём столбца с номером i столбцом свободных членов, на определитель исходной системы.

П р и м е р 1.6.1. Решите систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 19 \end{cases}$$

используя правило Крамера.

Вычислим определитель матрицы A. Получаем $|A| = -1$ (проверьте самостоятельно!). Поэтому

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 19 & 6 & 9 \end{vmatrix}}{-1}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \\ 5 & 19 & 8 \end{vmatrix}}{-1}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 19 \end{vmatrix}}{-1}.$$

Прекрасное упражнение — проверить, что $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия для существования обратной матрицы к заданной матрицы размера 3×3.
2. Сформулируйте правило Крамера для системы уравнений из двух переменных.

Упражнения к 1.6

Упражнение 1.6.1. *Найдите обратную матрицу к заданным:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.6.2. *Решите систему*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$$

используя правило Крамера.

Упражнение 1.6.3. *Пусть A — обратимая матрица размера 3×3. Матрицу B получили из A путём прибавления первого столбца к третьему, т.е.*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + a_{31} \end{vmatrix}$$

Докажите, что тогда существует обратная матрица B^{-1} и она получается из матрицы A^{-1} путём вычитания третьего строки из первой, т.е.

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} & a_{13}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{vmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11}^{-1} - a_{13}^{-1} & a_{12}^{-1} - a_{32}^{-1} & a_{13}^{-1} - a_{33}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} & a_{23}^{-1} \\ a_{31}^{-1} & a_{32}^{-1} & a_{33}^{-1} \end{vmatrix}$$

Ответы: 1.6.1 $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -10 & 3 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 9 \\ -2 & 2 & 6 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. **1.6.2** $(1, -1, 1)$.

Глава 2

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

2.1 Векторы

2.1.1 Свободные векторы. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении

Некоторые физические величины — температура, масса, плотность и т.п. измеряются одним числом. Их называют *скалярными*.

Другие величины, например, сила, ускорение, скорость называют векторными, для их измерения одного числа — величины не достаточно, следует указать ещё и их направление.

На иллюстрациях, поясняющих модели исследуемых физических процессов, векторные величины изображают стрелками, иными словами, направленными отрезками. Далее под словом вектор (геометрический вектор) понимаем направленный отрезок.

Подобно тому, как числа представляют собой предмет изучения арифметики, геометрические векторы являются объектом векторного исчисления, к изложению которого мы и приступаем.

Операции над векторами, которые будут определены ниже, представляют собой математические абстракции некоторых операций, проводимых над векторными физическими величинами.

Выше мы уже вводили понятия вектора-столбца и вектора-строки. Вскоре мы установим связь между этими понятиями и понятием геометрического вектора.

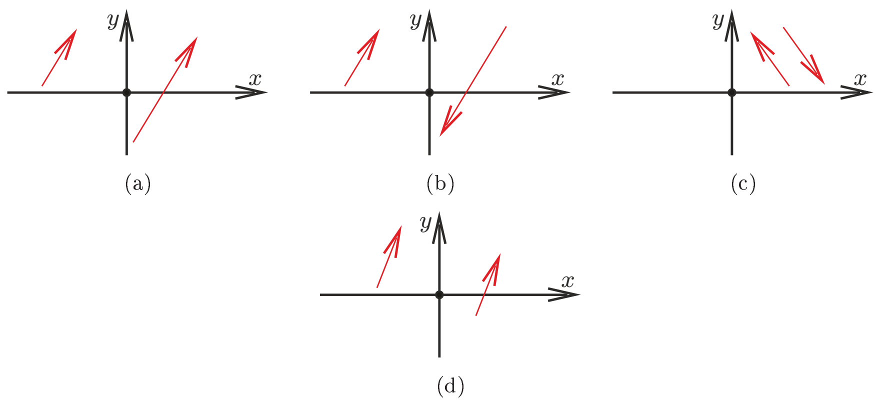


Рис. 2.1: Коллинеарные вектора: (a); (b); (c). Равные вектора: (d).

Определение 2.1.1. Два геометрических вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на параллельных прямых (это определение относится как к векторам на плоскости, так и к векторам в пространстве). Геометрические векторы называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одно и то же направление. Иными словами, если при параллельном переносе совместились начала этих направленных отрезков, то их концы тоже совпадают. Множество равных друг другу векторов назовём *свободным вектором.*

Обозначим свободный вектор символом $\vec{a}$. Поместим начало свободного вектора в точку A. Пусть при этом его конец попадёт в точку B. В этом случае пишут $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Если начало свободного вектора помещено в точку C, а при этом его конец попал в точку D, то также $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$ и геометрические векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны друг другу. Длину свободного вектора $\vec{a}$ обозначаем $|\vec{a}|$. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то $|\overrightarrow{AB}| = |\vec{a}|$. Заметим, что если геометрические векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны друг другу, то, по определению равенства векторов, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\vec{a}|$. Это означает, что понятие длины свободного вектора определено корректно, т.е. длина вектора не меняется при изменении точки приложения.

Пусть дана произвольная ось, обозначим её u и некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$. Опустим из точек A, B перпендикуляры на ось u и обозначим их основания A_1, B_1. Назовём проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось u величину отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$, т.е.

$$\text{пр}_u\overrightarrow{AB} = A_1B_1.$$

Легко видеть, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\text{пр}_u\overrightarrow{AB} = \text{пр}_u\overrightarrow{CD}$, поэтому можно говорить о проекции $\text{пр}_u\vec{a}$ свободного вектора $\vec{a}$ на ось u. Поместим начало вектора $\vec{a}$ на ось u и рассмотрим угол φ между этим вектором и положительным направлением оси u. Тогда $\text{пр}_u\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

Если оси u и v параллельны, то $\text{пр}_u\vec{a} = \text{пр}_v\vec{a}$.

Рассмотрим проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат. В случае плоского вектора обозначим их X, Y, а в случае пространственного вектора — X, Y, Z. Эти числа называем координатами вектора $\{X, Y\}$, соответственно, $\{X, Y, Z\}$ и тогда $\vec{a} = \{X, Y\}$, соответственно, $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$. Можно доказать, что двумерные векторы находятся во взаимно-однозначном соответствии с парами чисел X, Y — их координатами в заданной системе координат, то же замечание относится и к тройкам чисел X, Y, Z и векторам в пространстве. Упомянутые выше способы записи вектора в виде вектора-столбца или вектора-строки выбираются из соображений удобства для решаемой задачи.

Рассмотрим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A с координатами (x_1, y_1, z_1) и концом в точке B с координатами (x_2, y_2, z_2). Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Пусть $M(x, y)$ — некоторая точка плоскости (соответственно, $M(x, y, z)$ — некоторая точка пространства). Тогда вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ называется радиус-вектором этой точки. Из этого определения сразу получаем, что координаты точки совпадают с координатами радиус-вектора этой точки. Нулевой вектор $\vec{0}$ — это радиус-вектор начала координат. Все координаты нулевого вектора равны нулю.

Пусть вектор на плоскости задан своими координатами, $\vec{a} = \{X, Y\}$, соответственно, вектор в пространстве задан координатами $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$. Длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ на плоскости $\vec{a}$ равна длине диагонали прямоугольника со сторонами X, Y, т.е. числу $\sqrt{X^2 + Y^2}$, а длина вектора $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ равна длине диагонали прямоугольного параллелепипеда со сторонами X, Y, Z, т.е. числу $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Обозначим α, β, γ — углы, составляемые пространственным вектором $\vec{a} = \{X, Y, Z\}$ с осями координат.

Тогда

$$X = |\vec{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\vec{a}|\cos\beta, \quad Z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими* косинусами вектора $\vec{a}$. Имеем: $|a|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = |\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma$, откуда

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Расстояние между точками пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ равно длине отрезка, их соединяющего, т.е. $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Для точек плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ расстояние равно $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2.1.2 Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим задачу о делении отрезка в заданном отношении λ.

Наша задача состоит в отыскании на прямой, соединяющей точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, такой точки $M(x; y; z)$, что $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ (см. рис. 2.2(a)). Ввиду того, что рассматриваемое отношение сохраняется и для координат точек, получаем равенства:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z} = \lambda,$$

откуда находим координаты искомой точки

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

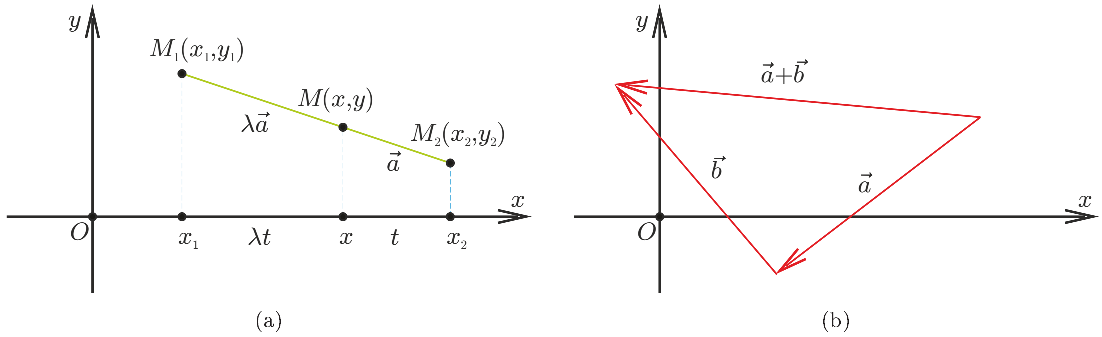


Рис. 2.2: Деление отрезка: (a). Сложение векторов: (b).

В случае прямой на плоскости, соединяющей точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ получаем координаты точки

$$M(x; y): \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частном случае, координаты центра середины отрезка, образованного точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ находим по формулам:

$$M(x; y; z): \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

2.1.3 Линейные операции над векторами и их выражение через координаты

Определим сумму $\vec{a} + \vec{b}$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, как вектор, который соединяет начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ помещено в конец вектора $\vec{a}$ (см. рис. 2.2(b)).

Определим произведение $\alpha\vec{a}$ числа α на вектор $\vec{a}$ как вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\alpha||\vec{a}|$ и направленный в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и в противоположную вектору $\vec{a}$ сторону, если $\alpha < 0$. При $\alpha = 0$, либо при $\vec{a} = \vec{0}$, вектор $\alpha\vec{a} = \vec{0}$.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте определение коллинеарных, равных, свободных векторов.
2. Для точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ укажите координаты середины отрезка M_1M_2.

Упражнения к 2.1

Упражнение 2.1.1. *Найдите вектор $\vec{a}$, образующий с тремя базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ равные тупые углы, при условии $|\vec{a}| = 4\sqrt{3}$.*

Упражнение 2.1.2. *Докажите, что точка пересечения медиан в треугольнике ABC, с координатами $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ совпадает с цетром тяжести, т.е. имеет координаты $\left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3}, \frac{y_a+y_b+y_c}{3}\right)$.*

Ответы: **2.1.1** $-(4, 4, 4)$. **2.1.2** *Указание:* медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины.

2.2 Векторное и смешанное произведение

2.2.1 Векторное произведение

Этот раздел посвящён операции над векторами, имеющей важные приложения.

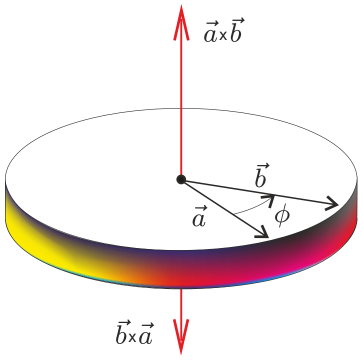


Рис. 2.3:

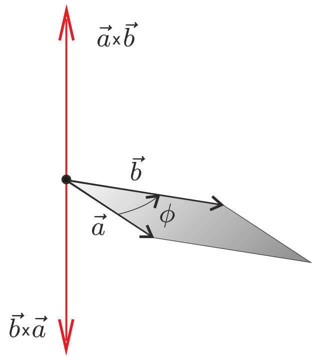


Рис. 2.4:

Определение 2.2.1. *Векторным произведением* $\vec{a}\times\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор, определяемый условиями (см. рис. 2.3):

- Модуль вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- Направление вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ выбрано так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку. Это означает, что если все эти векторы приведены к общему началу, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ происходящим против часовой стрелки.

Векторное произведение имеет следующий простой механический смысл. Если вектор $\vec{b}$ изображает силу, приложенную к точке M, а вектор $\vec{a}$ соединяет точки O и M, то $\vec{a}\times\vec{b}$ представляет собой момент силы $\vec{b}$ относительно точки O.

Основные свойства векторного произведения

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\vec{0}$, то он параллелен другому из них, так как, по определению, нулевой вектор $\vec{0}$ параллелен любому вектору. При этом $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=0$ и, следовательно, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Если оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то поскольку равенство $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ равносильно равенству $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi=0$, мы получаем, что $\sin\varphi=0$, что равносильно параллельности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. □

2. Имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

Доказательство. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\vec{0}$, то равенство является очевидным. Если оба вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то они имеют одинаковые модули, параллельны и направлены в противоположные стороны, (см. рис. 2.4). □

3. Имеют место равенства $(\mu\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\mu\vec{b})=\mu(\vec{a}\times\vec{b})$.

Доказательство. Легко проверить, что вектора $(\mu\vec{a})\times\vec{b}$, $\vec{a}\times(\mu\vec{b})$ и $\mu(\vec{a}\times\vec{b})$ направлены одинаково (достаточно рассмотреть два случая, по знаку константы μ). Если одну сторону параллелограмма умножить на константу $|\mu|$, то площадь параллелограмма умножится тоже на $|\mu|$. Следовательно справедливость данного утверждения доказана. $\square$

4. Имеют место равенства $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (распределительное свойство относительно сложения).

Доказательство. Докажем равенство $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$. Предварительно рассмотрим вспомогательное утверждение:

Лемма 1. *Если $\vec{a}_1$ — проекция вектора $\vec{a}$ на плоскость π и $\vec{c}\perp\pi$, то $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}_1\times\vec{c}$.*

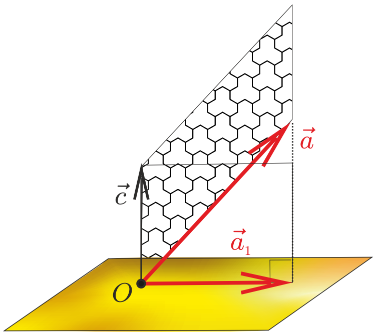


Рис. 2.5:

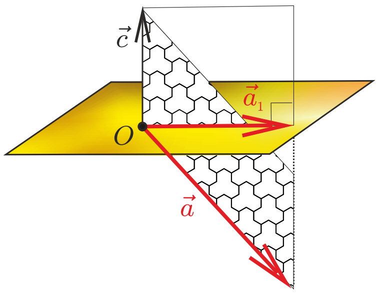


Рис. 2.6:

Доказательство леммы вытекает из того, что (см. рис. 2.5, 2.6):

1) Площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}_1$ совпадают.

2) Поскольку вектор $\vec{a}_1$ является проекцией вектора $\vec{a}_1$ на плоскость π, то кратчайшая дуга пары векторов от $\vec{a}$ к $\vec{c}$ и от $\vec{a}_1$ к $\vec{c}$ будет в одну сторону, либо по часовой стрелки, либо против (см. рис. 2.5, 2.6). Поэтому векторы $\vec{a}\times\vec{c}$ и $\vec{a}_1\times\vec{c}$ имеют одинаковое направление.

Лемма доказана. Докажем исходное утверждение. Для $\vec{c}=0$ оно очевидно. Докажем для $\vec{c}=\vec{e}$, где $\vec{e}=1$. Построим вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ и спроецируем их на плоскость ортоганальную вектору $\vec{c}$ (см. рис. 2.7). В результате на плоскости получается вектора $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_1+\vec{b}_1$. Рассмотрим вектора $\vec{a}_1\times\vec{e}$, $\vec{b}_1\times\vec{e}$,

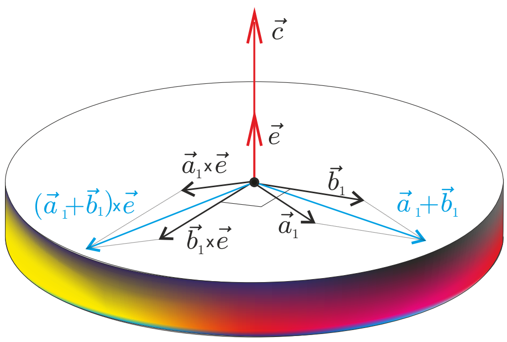


Рис. 2.7:

$(\vec{a}_1+\vec{b}_1)\times\vec{e}$, которые получаются из векторов $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_1+\vec{b}_1$ поворотом на угол $\pi/2$. Следовательно

$$(\vec{a}_1+\vec{b}_1)\times\vec{e}=\vec{a}_1\times\vec{e}+\vec{b}_1\times\vec{e}.$$

Согласно лемме $\vec{a}\times\vec{e}=\vec{a}_1\times\vec{e}$, $\vec{b}\times\vec{e}=\vec{b}_1\times\vec{e}$, $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{e}=(\vec{a}_1+\vec{b}_1)\times\vec{e}$. Откуда следует

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},$$

для единичного вектора $\vec{c}$. Общий случай вектора $\vec{c}$ получаем применением предыдущего доказанного пункта к вектору $\vec{c}=|\vec{c}|\cdot\vec{e}$. □

Выражение векторного произведения через координаты векторов

Сначала отметим равенства, следующие из определения векторного произведения:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} & \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, & \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0} & \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0} \end{array}$$

Действительно, модули всех этих векторов равны 1, каждый из векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ перпендикулярен двум остальным, тройки векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, как и векторов $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{i}$ и векторов $\vec{k}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ — правые.

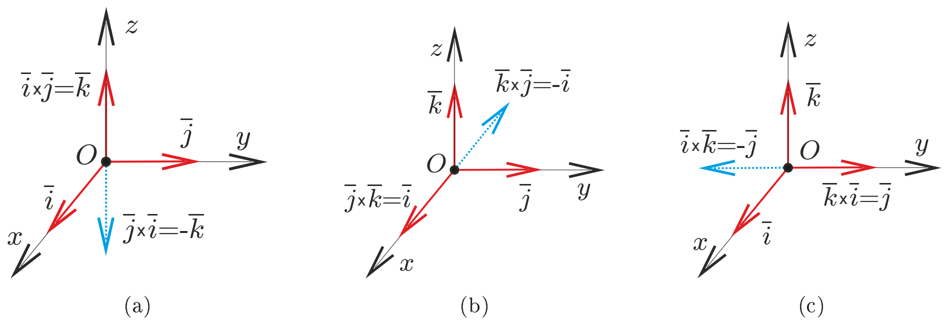


Рис. 2.8: Векторное произведение: (a); (b); (c).

Это доказывает первые три равенства. Остальные сразу получаются из этих равенств и свойства 2. Пусть

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}).$$

Используя свойства векторного произведения и найденные ранее равенства, находим:

$$\begin{aligned}&\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=\\&=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}=\\&=x_1x_2\vec{0}-y_1x_2\vec{k}+z_1x_2\vec{j}+x_1y_2\vec{k}+y_1y_2\vec{0}-z_1y_2\vec{i}-x_1z_2\vec{j}+y_1z_2\vec{i}+z_1z_2\vec{0}=\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$y_1z_2-z_1y_2=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix},\quad x_1z_2-z_1x_2=\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix},\quad x_1y_2-y_1x_2=\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}.$$

Окончательно получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}. \tag{2.2.1}$$

Правая часть последнего равенства представляет собой разложение по первой строке определителя вида

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Здесь может возникнуть недоумение: ранее мы рассматривали определители матриц, все элементы которых были числами. Здесь же, в первой строке, стоят векторы!?

Уважаемый читатель! Не огорчайтесь, дальше будет ещё хуже! На втором курсе, при изучении теории поля Вам встретится определитель, в первой строке которого стоят векторы, во второй – дифференциальные операторы, а в третьей – функции(так называемый ротор(или вихрь) векторного поля)! И Вам это понравится, так как использование определителя в записи формулы Стокса облегчит её запоминание.

Как же всё-таки понимать определитель? Очень просто: давайте считать его формальной записью правой части равенства (2.2.1). При этом мы отвлекаемся от природы элементов определителя, считаем их некоторыми символами, для которых равенство (2.2.1) осмыслено. Тогда мы получаем равенство

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

выражающее векторное произведение векторов через их координаты.

П р и м е р 2.2.1. Пусть $\vec{a}=(1,-1,0)$, $\vec{b}=(1,2,1)$.

- Найдите векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$.
- Найдите площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Справедливо:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(-1,-1,3).$$

Действительно, можно легко убедится, что $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ и $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$. Теперь найдём площадь:

$$S_{\vec{a},\vec{b}}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|(-1,-1,3)|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11}.$$

2.2.2 Смешанное произведение

Определение 2.2.2. *Смешанным произведением* трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. Здесь скалярно умножается вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}\times\vec{c}$.

Координатный вид смешанного произведения имеет вид

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произхведения:

- $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{a})=(\vec{c},\ \vec{a},\ \vec{b})=-(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{b})=-(\vec{c},\ \vec{b},\ \vec{a})=-(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{c})$.
- $(\lambda\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})=(\vec{a},\ \lambda\vec{b},\ \vec{c})=(\vec{a},\ \vec{b},\ \lambda\vec{c})=\lambda(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$.
- $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{b},\ \vec{c})=(\vec{a}_1,\ \vec{b},\ \vec{c})+(\vec{a}_2,\ \vec{b},\ \vec{c})$.
- $(\vec{a},\ \vec{b}_1+\vec{b}_2,\ \vec{c})=(\vec{a},\ \vec{b}_1,\ \vec{c})+(\vec{a},\ \vec{b}_2,\ \vec{c})$.
- $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}_1+\vec{c}_2)=(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}_1)+(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}_2)$.
- Тройка векторов является правой тогда и только тогда, когда $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})>0$. Если же $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})<0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку векторов. (Данное свойство вытекает из геометрического смысла смешанного произведения).

Геометрический смысл смешанного произведения

Отложим данные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ от общего начала и построим на этих векторах, как на ребрах, параллелепипед (предполагая, что векторы не лежат в одной плоскости).

Построим также вектор $\vec{n} = \vec{b}\times\vec{c}$, модуль которого равен площади $S_{b,c} = S$ параллелограмма, построенного па векторах $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (см. рис. 2.9), т.е. $\vec{n} = S\vec{n}_0$, где $\vec{n}_0$ — единичный вектор.

На основании определения смешанного произведения и скалярного произведения

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = S\cdot(\vec{a}\cdot\vec{n}_0) = S\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\alpha,$$

где α угол между векторами $\vec{n}_0$ и $\vec{a}$. Предполагая, что $\alpha < \pi/2$ и обозначая через h высоту параллелепипеда, находим $h = |\vec{a}|\cos\alpha$. Таким образом,

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = S\cdot h = V,$$

т.е. равно объему V рассматриваемого параллелепипеда. Следовательно, $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = V$.

Если же $\alpha > \pi/2$, то $\cos\alpha < 0$ и $|\vec{a}|\cos\alpha = -h$. Следовательно,

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = -V.$$

Объединяя оба эти случая, получаем окончательно

$$(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) = \pm V,$$

или

$$V = |(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})|.$$

Смешанное произведение трех векторов с точностью до знака равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

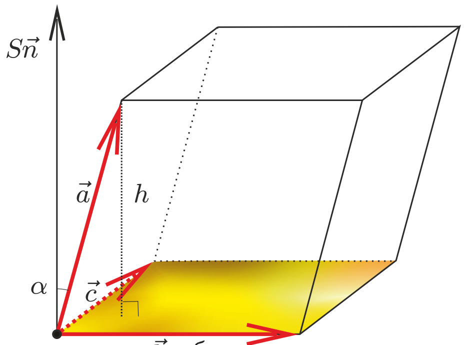


Рис. 2.9: Смешанное произведение.

2.2.3 Объём параллелипипеда, треугольной пирамиды

Объём паралеллипипеда, натянутого на вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен смешанному произведению этих векторов.

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \mod \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \left| a_1\cdot\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= |a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)|.$$

Объём треугольной пирамиды на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в шесть раз меньше объёма параллелипипеда, натянутого на вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$V_{\text{треуг. пирамида}} = \frac{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}}{6} = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Условие компланарности трёх веторов

Определение 2.2.3. Будем говорить, что вектора *компланарны*, если они лежэат в одной плоскости.

Условие того, что три вектора копмланарны равносильно тому, что объём параллелипипеда, построенный на этих векторах равен нулю. Таким образом справедливо:

Вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — компланарны тогда и только тогда, если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равно нулю.

Иначе говоря, вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарны тогда и только тогда, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Контрольные вопросы.

1. Докажите равенство $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.
2. Будут ли компланарны (т.е. лежать в одной плоскости) вектора $\vec{a}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{a}_2 = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a}_3 = \vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$, $\vec{b}$ — вектора из $\mathbb{R}^3$?

Упражнения к 2.2

Упражнение 2.2.1. *Выполнено ли свойство ассоциативности для векторного произведения, т.е. справедливо ли равенство* $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$*?*

Упражнение 2.2.2. *Найдите объем пирамиды построенной на векторах* $\vec{a} = \{1;2;3\}$, $\vec{b} = \{1;-1;1\}$, $\vec{c} = \{2;0;-1\}$.

Упражнение 2.2.3. *Объем тетраэдра равен* 5*, три его вершины известны* $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$*. Найдите координаты четвёртой вершины* D*, если известно, что она лежит на оси* Oy.

Упражнение 2.2.4. *Докажите равенство*

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

Упражнение 2.2.5. *Назовём двойным векторным произведением* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$*. Докажите, что для двойного векторного произведения справедлива формула Лагранжа:*

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Данное равенство можно запомнить по мнемоническому правилу «бац минус цаб».

Упражнение 2.2.6. *Докажите тождество Якоби:* $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] + [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = 0$.

Ответы: 2.2.1 Нет. *Указание:* рассмотрите пример $\vec{a} = (1,2,0)$, $\vec{b} = (-1,0,0)$, $\vec{c} = (0,2,1)$ и получите $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (-4,0,0) \neq (-4,2,1) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. **2.2.2** 13/6. **2.2.3** ??? **2.2.6** *Указание:* воспользуйтесь формулой Лагранжа из предыдущего упражнения.

2.3 Аналитическая геометрия на плоскости

2.3.1 Уравнение прямой

1. Начнём с общего уравнения прямой (см. рис. 2.11)

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

данный вид прямой называется её *каноническим видом.* В частном случае, если $b \neq 0$, уравнение можно разделить на b и записать в виде

$$y = kx + d, \quad \text{где } k = -a/b,\ d = -c/b.$$

Определение 2.3.1. Всякий ненулевой вектор $\vec{l} = \{m,n\}$, лежащий на прямой или параллельный ей, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Вектор называется *ортогональным (нормальным или вектором нормали)* прямой, если он перпендикулярен ее направляющему вектору.

Покажем, что вектор $\vec{n} = \{a,b\}$ ортогонален прямой $ax + by + c = 0$ (см. рис. 2.10(b)).

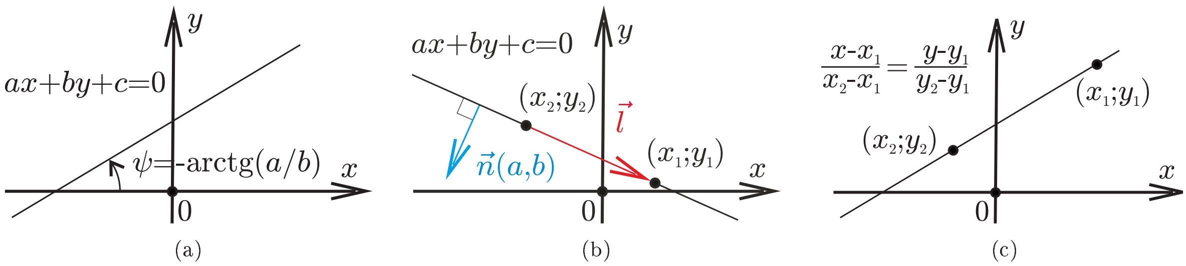


Рис. 2.10: Прямая на плоскости: (a); (b); (c).

Доказательство. Возьмём две произвольные различные точки на прямой (x_1, y_1) и (x_2, y_2), т.е. они удовлетворяют уравнению

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0.$$

Если вычесть из одного уравнения другое, то получим

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 \Longleftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{l} = 0,$$

где $\vec{l} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}$ — направляющий вектор прямой. □

2. Уравнение прямой, проходящей через две заданные различные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) записывается в виде (см. рис. 2.12).

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

В случае $x_2 = x_1$ прямую понимаем, как $x = x_1$, а в случае $y_2 = y_1$ прямую понимаем, как $y = y_1$.

2.3.2 Расположение прямых на плоскости

Прямые на плоскости либо не пересекаются, т.е. параллельны, либо пересекаются. Угол между прямыми $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ можно найти по формуле

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

В случае задания прямых в виде $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$, угол между прямыми можно найти из равенства

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Рассмотрим подробнее случаи параллельности и ортогональности двух прямых.

1. Прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ параллельны, если справедливо равенство: $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$ (данное равенство означает пропорциональность векторов $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$).

2. Прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ перпендикулярны (или ортогональны), если справедливо равенство: $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ (данное равенство означает, что скалярное произведение векторов $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ равно нулю).

В случае задания прямых в виде $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$, условие перпендикулярности $k_1 \cdot k_2 = -1$.

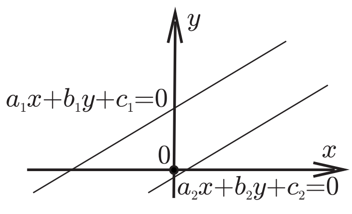


Рис. 2.11: Параллельность.

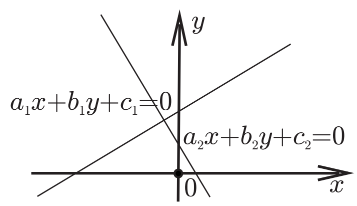


Рис. 2.12: Перпендикулярность.

2.3.3 Уравнение прямой в отрезках, нормальное и параметрическое уравнение прямой

Уравнение прямой в отрезках

Уравнение прямой линии, пересекающей ось Ox в точке $(a,\ 0)$ и ось Oy в точке $(0,\ b)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad (a\neq 0,\ b\neq 0).$$

В этом виде невозможно представить прямую, проходящую через начало координат.

Нормальное уравнение прямой

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0,$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат, а θ — угол (измеренный в положительном направлении) между положительным направлением оси Ox и направлением этого перпендикуляра. Если $p=0$, то прямая проходит через начало координат, а угол $\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}$ задаёт угол наклона прямой.

Для того, чтобы перейти от канонического вида прямой $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ к нормальному виду, достаточно разделить обе части уравнения, заданного в каноническом виде на $\sqrt{a^2+b^2}$.

Параметрические уравнения прямой

Параметрическое уравнение прямой может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \end{cases} \iff \vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{l},$$

где t — произвольный параметр, $\vec{l}=(m,\ n)$ — координаты x и y направляющего вектора прямой, $\vec{r_0}=(x_0,y_0)$ — произвольная точка прямой.

2.3.4 Расстояние от точки до прямой, расстояние между прямыми

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $P(x_0,y_0)$ до прямой $ax+by+c=0$, $a^2+b^2\neq 0$ выражается формулой:

$$\varrho=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Доказательство. Опустим из точки $P(x_0,y_0)$ перпендикуляр на прямую $ax+by+c=0$. Основание перпендикуляра обозначим через точку $Q(x_1,y_1)$ (см. рис. 2.13) Поскольку вектор $\overrightarrow{PQ}$ ортогонален прямой $ax+by+c=0$ (также как и вектор $\vec{n}=(a,b)$), то существует такая константа $k\in\mathbb{R}$, что справедливо $\overrightarrow{PQ}=-k\vec{n}$ (см. рис. 2.14) или

$$\begin{cases} x_1-x_0=-ka, \\ y_1-y_0=-kb. \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=x_0-ka, \\ y_1=y_0-kb. \end{cases}$$

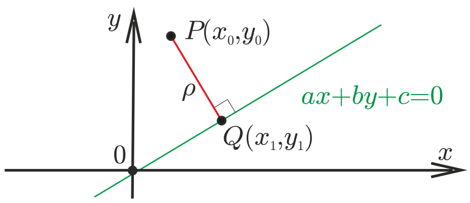


Рис. 2.13:

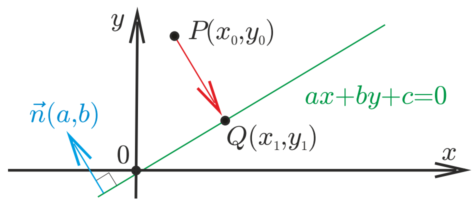


Рис. 2.14:

Поскольку точка Q принадлежит прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению

$$a(x_0 - ka) + b(y_0 - kb) + c = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Теперь из уравнения $|\overrightarrow{PQ}| = |k| \cdot |\vec{n}|$ находим расстояние от точки до прямой. $\square$

Расстояние между параллельными прямыми

Расстояние между параллельными прямыми $ax + by + c_1 = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$ и $ax + by + c_2 = 0$.

$$\varrho = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку (x_0, y_0) на первой прямой, т.е. выполнено $ax_0 + by_0 + c_1 = 0$. Найдём расстояние от этой точки до другой прямой:

$$\varrho = \frac{|ax_0 + by_0 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(ax_0 + by_0 + c_1) + (c_2 - c_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\square$

П р и м е р 2.3.1. Прямая l_1 проходит через точки $(-3; 2)$ и $(1; 1)$ координатной плоскости $(x; y)$. Прямая l_2 проходит через точку $(-5; 4)$ и перпендикулярна прямой l_1. Найти координаты пересечения прямых l_1 и l_2.

Решение. Составим уравнение прямой l_1 проходящей через точки $(-3; 2)$ и $(1; 1)$:

$$\frac{x - 1}{-3 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1} \Longleftrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}.$$

Угловой коэффициент k_1 прямой l_1 равен $-1/4$. Из условия перпендикулярности прямых l_1 и l_2 находим угловой коэффициент k_2 прямой l_2:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \Longleftrightarrow k_2 = 4.$$

Найдём уравнение прямой l_2, использую условие, что данная прямая l_2 проходит через точку $(-5; 4)$:

$$(y - 4) = k_2(x + 5) \Longleftrightarrow y = 4x + 24.$$

Для нахождения точки пересечения исходных прямых, достаточно решить систему:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}, \\ y = 4x + 24. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{91}{17}, \\ y = \frac{44}{17}. \end{cases}$$

Ответ: $(-91/17; 44/17)$.

2.3.5 Полярная система координат.

Определение 2.3.2. *Полярная система координат* — двухмерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами – полярным углом и полярным радиусом.

Полярная система координат задаётся лучом, который называют *нулевым* или *полярной осью*. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или *полюсом*. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: *радиальной* и *угловой*. Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата также называется *полярным углом* или *азимутом* и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.

Связь между декартовыми и полярными координатами

Пару полярных координат r и φ можно перевести в Декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

в то время как две декартовы координаты x и y могут быть переведены в полярную координату r :

$$r^2 = y^2 + x^2.$$

Значение φ может быть определено из равенства:

$$\operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

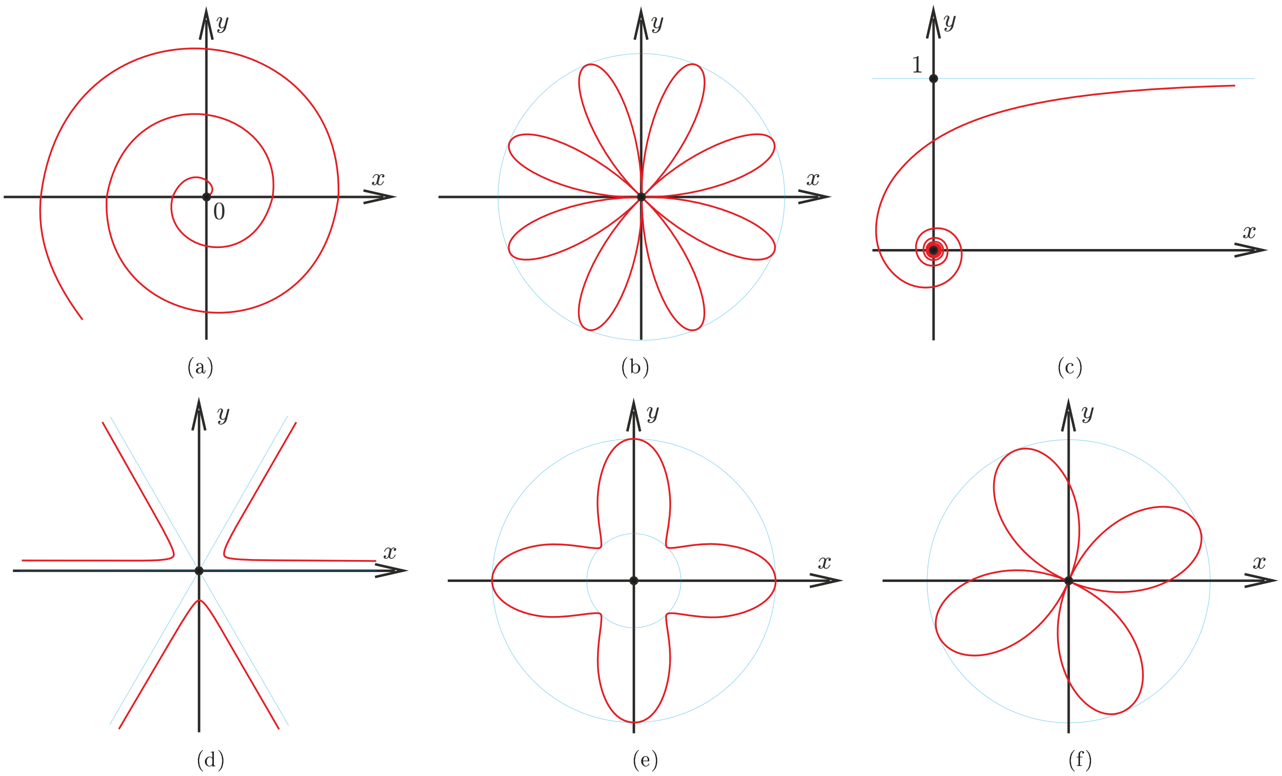


Рис. 2.15: Графики функций: (a): $r(\varphi) = \varphi$; (b): $r(\varphi) = |\sin(4\varphi)|$; (c): $r(\varphi) = 1/\varphi$; (d): $r(\varphi) = 1/\sin(3\varphi)$; (e): $r(\varphi) = 2 + \cos(4\varphi)$; (f): $r(\varphi) = |\sin(2\varphi) + \cos(2\varphi)|$.

2.3.6 Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости

Параллельный перенос

Определение 2.3.3. *Параллельный перенос* — частный случай движения, при котором все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x - a, \\ y' = y - b \end{cases}$$

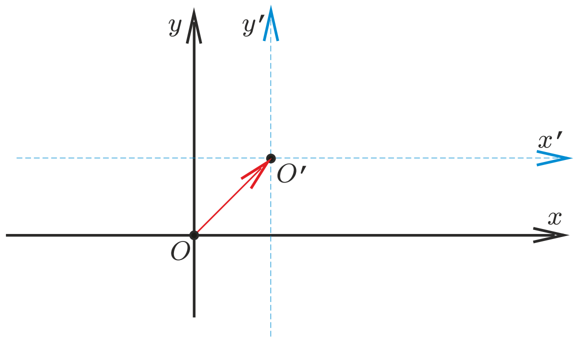


Рис. 2.16:

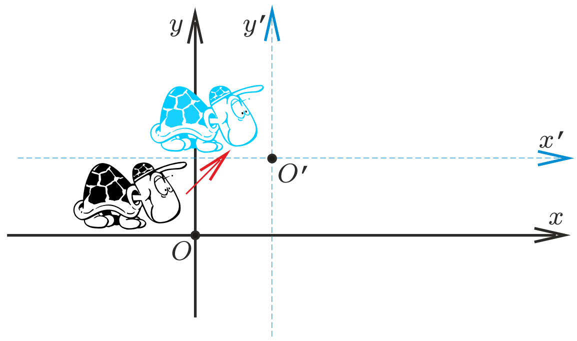


Рис. 2.17:

Поворот координатных осей

Определение 2.3.4. *Поворот* (вращение) — движение, при котором по крайней мере одна точка плоскости (пространства) остаётся неподвижной. Неподвижная точка называется *центром вращения.*

Поместим начало координат в центр вращения. Тогда вращения в плоскости перемещают точки по дуге окружности, центр которой находится в начале координат. Рассмотрим сначала движение одной точки при повороте на угол α (положительным является направление против часовой стрелки), т. е. поворот радиус-вектора на угол (см. рис. 2.18). Пусть точка A располагалась на расстоянии r от начала координат, а ее радиус-вектор составлял угол β с осью абсцисс. Тогда координаты точки A' в новой декартовой системе $Ox'y'$ определяются формулами

$$x' = r\cos\beta, \quad y' = r\sin\beta.$$

После поворота вектор будет составлять угол $\beta+\alpha$, а координаты точки A' в старой декартовой системе Oxy будут определяться соотношениями

$$x = r\cos(\beta+\alpha) = r\cos\beta\cos\alpha - r\sin\beta\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = r\sin(\beta+\alpha) = r\sin\beta\cos\alpha + r\cos\beta\sin\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Можно показать, что при таком преобразовании сохраняются расстояния между точками, а следовательно, и углы между отрезками.

$$\begin{cases} x = \cos\alpha\,\cdot x' - \sin\alpha\,\cdot y', \\ y = \sin\alpha\,\cdot x' + \cos\alpha\,\cdot y', \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \cos\alpha\,\cdot x + \sin\alpha\,\cdot y, \\ y' = -\sin\alpha\,\cdot x + \cos\alpha\,\cdot y, \end{cases}$$

Или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

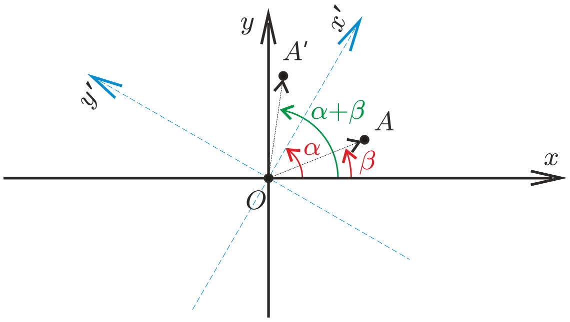


Рис. 2.18:

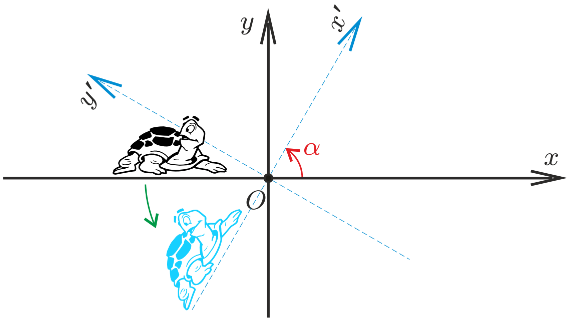


Рис. 2.19:

Параллельный сдвиг и поворот координат осей

Объединяя, сказанное выше, приходим к формулам:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

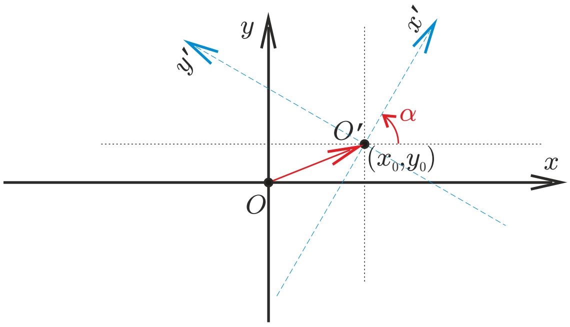


Рис. 2.20:

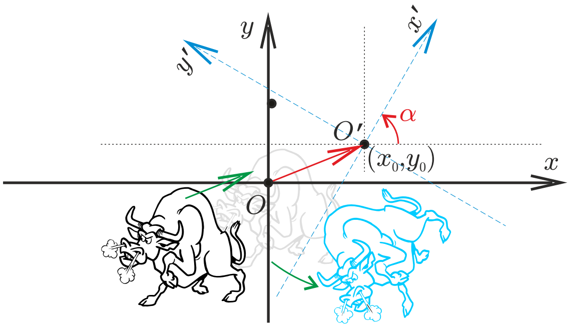


Рис. 2.21:

Контрольные вопросы.

1. Найти угол между прямыми $y = 2x + 3$, $y = 3x + 2$.
2. Найти угол между прямыми $y = 2x + 3$, $2y + x = 15$.
3. Найти расстояние между прямыми $x - y + 3 = 0$ и $2x - 2y + 7 = 0$.
4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 1)$ и $B(-1; 3)$.

Упражнения к 2.3

Упражнение 2.3.1. *Найти расстояние от точки* $A(4; -2)$ *до прямой* $8x - 15y - 11 = 0$.

Упражнение 2.3.2. *Найти расстояние от точки* $A(2; 7)$ *до прямой* $12x + 5y - 7 = 0$.

Упражнение 2.3.3. *Даны вершины треугольника:* $A(-1.7; -3.28)$, $B(4; 3)$ *и* $C(2; -1)$. *Вычислить длину его высот.*

Упражнение 2.3.4. *Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя прямыми* $2x - 9y + 18 = 0$ *и* $6x + 7y - 21 = 0$. *Провериь, что эти биссектрисы перпендикулярны друг другу.*

Упражнение 2.3.5. *Составить уравнения прямой, параллельной прямой* $y = (8/15)x + 1$ *и проходящей от точки* $P(6; -2)$ *на расстоянии* 4.

Упражнение 2.3.6. *Прямая* l_1 *проходит через точки* $(4;5)$ *и* $(7;6)$ *координатной плоскости* $(x;y)$. *Прямая* l_2 *проходит через точку* $(3;-5)$ *и перпендикулярна прямой* l_1. *Найти координаты точки пересечения прямых* l_1 *и* l_2.

Упражнение 2.3.7. *В треугольнике* ABC *известны стороны* $AB = 12$, $BC = 18$ *и* $AC = 24$. *Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан* O_m *и биссектрисс* O_l, *параллельна стороне* BC *и найдите длину отрезка* O_mO_l.

Упражнение 2.3.8. *Решите систему*

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-4)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,|x-2y-2| = 2\sqrt{5}, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Упражнение 2.3.9. *Прямая задана уравнением* $2x+4y-4=0$. *Произведя поворот координатных осей* Oxy *на угол* $\pi/6$ *против часовой стрелки перейти к координатам* $Ox'y'$ *и записать вид исходной прямой в новых координатах.*

Упражнение 2.3.10. *Кривая задана уравнением* $x^2-2xy+y^2-10\sqrt{2}(x+y)=0$. *Произведя поворот координатных осей* Oxy *на угол* $\pi/4$ *против часовой стрелки перейти к координатам* $Ox'y'$ *и записать вид исходной кривой в новых координатах.*

Ответы: **2.3.1**. 3. **2.3.2**. 4. **2.3.3**. $h_A = 29\sqrt{5}/28$, $h_B = 58/13$, $h_C = 2$. **2.3.4**. $8x-2y-3=0$, $4x+16y-39=0$. **2.3.5**. $y = (8/15)x - 2/3$. **2.3.6**. $(1/10; 111/30)$. **2.3.7**. $O_mO_l = BC/9 = 2$. **2.3.8**. $(2;0)$. *Указание:* воспользуйтесь тем, что второе слагаемое в первой формуле можно интерпритировать как расстояние от точки до прямой. **2.3.9**. $x'(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{3})y' = 4$. **2.3.10**. $(y')^2 - 10x' = 0$.

2.4 Аналитическая геометрия в пространстве

2.4.1 Плоскость

Назовём плоскостью геометрическое место точек, удовлетворяющее заданному уравнению:

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad A^2+B^2+C^2 \neq 0,$$

Данное уравнение будем называть ***каноническим видом*** плоскости.

Покажем, что произвольный вектор, лежащей в плоскости будет ортогонален вектору $\vec{n} = (A,B,C)$, который мы назовём ***вектором нормали*** к плоскости.

Доказательство. Действительно, возьмём две произвольные различные точки на плоскости (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2), т.е. они удовлетворяют уравнению

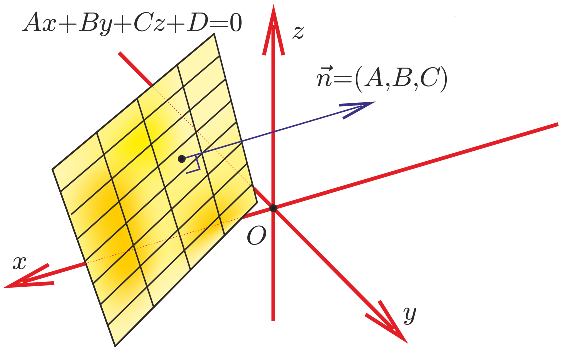


Рис. 2.22: Плоскость.

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0.$$

Если вычесть из одного уравнения другое, то получим

$$A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)+C(z_1-z_2)=0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{l}=0,$$

где $\vec{l} = \{x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2\}$ — вектор лежащий в плоскости. □

В векторной форме уравнение плоскости можно записать в виде:

$$(\vec{r},\vec{n})+D=0$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ перпендикулярен к плоскости (нормальный вектор). Направляющие косинусы вектора $\vec{n}$:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Уравнение плоскости по трём точкам, не лежащим на одной прямой

Уравнение плоскости, проходящее через три заданные точки $(x_a; y_a; z_a)$, $(x_b; y_b; z_b)$, $(x_c; y_c; z_c)$ не лежащие на одной прямой, можно записать в следующем виде:

$$((\vec{r} - \vec{r_a}), (\vec{r_b} - \vec{r_a}), (\vec{r_c} - \vec{r_a})) = 0,$$

(смешанное произведение векторов равно нулю), иначе

$$\begin{vmatrix} x - x_a & y - y_a & z - z_a \\ x_b - x_a & y_b - y_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a & z_c - z_a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$
$$A(x - x_a) + B(y - y_a) + C(z - z_a) = 0,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y_b - y_a & z_b - z_a \\ y_c - y_a & z_c - z_a \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} x_b - x_a & z_b - z_a \\ x_c - x_a & z_c - z_a \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_b - x_a & y_b - y_a \\ x_c - x_a & y_c - y_a \end{vmatrix}.$$

Нормальное уравнение плоскости

Нормальное уравнение плоскости:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0.$$

в векторной форме: $(\vec{r}, \vec{n_0}) - p = 0$, где $\vec{n_0}$ — единичный вектор, p — расстояние от начала координат до плоскости. Как мы уже замечали, углы α, β, γ — углы между вектором нормали плоскости и соответствующими координатными осями. Нормальное уравнение может быть получено из канонического уравнения плоскости умножением на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (знаки μ и D противоположны).

Уравнение плоскости в отрезках

Заметим, что уравнение плоскости можно выписать сразу, если удобным образом выбрать систему координат. Покажем на примерах, что имеется в виду:

П р и м е р 2.4.1. Допустим, что нам удалось ввести систему координат таким образом, что известно, что искомая плоскость проходит через оси координат Ox, Oy, Oz в точках x_0, y_0, z_0 соответственно (см. рис. 2.23). Тогда уравнение плоскости запишется в виде

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

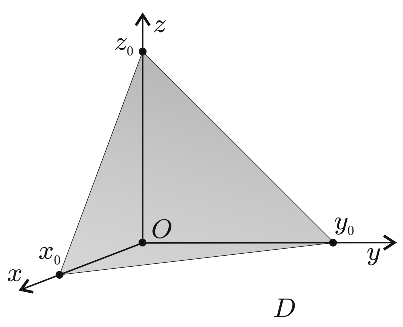


Рис. 2.23: $\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$

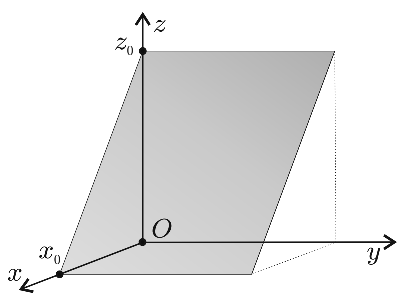


Рис. 2.24: $\frac{x}{x_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$

П р и м е р 2.4.2. Допустим, что нам удалось ввести систему координат таким образом, что известно, что искомая плоскость параллельна какой либо оси координат Ox, Oy или Oz. Тогда в уравнении плоскости будет отсутствовать эта координата. Например плоскость параллельна либо проходит через ось Ox, тогда в уравнении плоскости отсутсвует координата x. Предположим, что наша плоскость параллельна оси Oy и проходит через оси координат Ox, Oz в точках x_0, z_0 соответственно (см. рис. 2.24). Тогда уравнение плоскости запишется в виде

$$\frac{x}{x_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

П р и м е р 2.4.3. Допустим, что нам удалось ввести систему координат таким образом, что известно, что искомая плоскость параллельна сразу двум каким либо осям координат. Тогда в уравнении плоскости будет отсутствовать эти две координаты. Например плоскость параллельна либо проходит через оси Ox и Oy. Тогда в уравнении плоскости отсутсвует координата x и координата y.

Предположим, что наша плоскость параллельна осям Ox и Oy и проходит через ось координат Oz в точке z_0 (см. рис. 2.25). Тогда уравнение плоскости запишется в виде

$$z = z_0.$$

Ещё один такой случай изображён на рис. 2.26, случай, когда плоскость параллельна осям Oy, Oz.

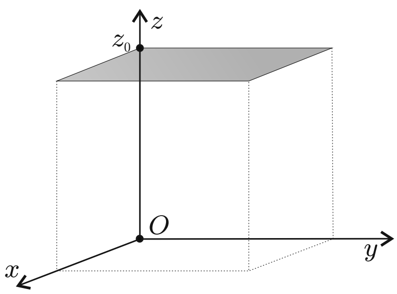


Рис. 2.25: $z = z_0$.

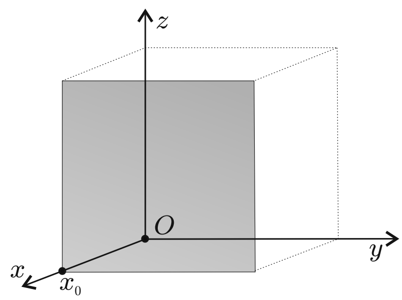


Рис. 2.26: $x = x_0$.

П р и м е р 2.4.4. Допустим, что нам удалось ввести систему координат таким образом, что известно, что искомая плоскость параллельна какой либо оси координат Ox, Oy или Oz. Тогда, как уже нам известно, в уравнении плоскости будет отсутствовать эта координата.

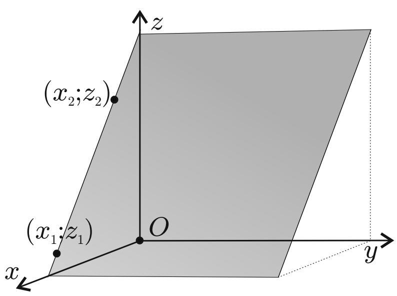


Рис. 2.27: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

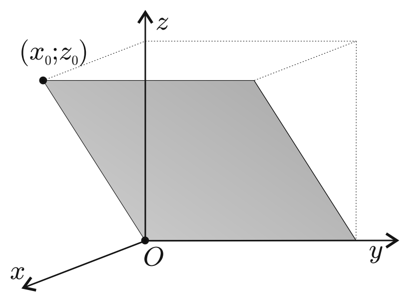


Рис. 2.28: $\frac{x}{x_0} = \frac{z}{z_0}$.

Предположим, что наша плоскость параллельна оси Oy и проходит через две заданные точки $(x_1; 0; z_1)$ и $(x_2; 0; z_2)$. Тогда в уравнении плоскости будет осутствовать координата y, и потому уравненпие прямой в плоскости Oxz будет уравнением плоскости в пространстве (см. рис. 2.27). Т.е. уравнение плоскости запишется в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ещё один такой случай изображён на рис. 2.28, случай, когда плоскость параллельна оси Oy и проходит через точки $(0; 0; 0)$ и $(x_0; 0; z_0)$.

2.4.2 Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ можно вычислить по формуле

$$\varrho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Доказательство. Доказательство практически дословно повторяет рассуждение о нахождения расстояния от точки до прямой в $\mathbb{R}^2$. Действительно, опустим из точки $P(x_0, y_0, z_0)$ перпендикуляр на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ Основание перпендикуляра обозначим через точку $Q(x_1, y_1, z_1)$.Поскольку вектор $\overrightarrow{PQ}$ ортогонален плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (также как и вектор $\vec{n} = (A, B, C)$), то существует такая константа $k \in \mathbb{R}$, что справедливо $\overrightarrow{PQ} = -k\vec{n}$ или

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_0 = -kA, \\ y_1 - y_0 = -kB, \\ z_1 - z_0 = -kC. \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_0 - kA, \\ y_1 = y_0 - kB, \\ z_1 = z_0 - kC. \end{array}\right.$$

Поскольку точка Q принадлежит прямой, то её координаты удовлетворяют уравнению

$$A(x_0 - kA) + B(y_0 - kB) + C(z_0 - kC) + D = 0 \Longleftrightarrow k = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Теперь из уравнения $|\overrightarrow{PQ}| = |k| \cdot |\vec{n}|$ находим расстояние от точки до плоскости. □

Расстояние между параллельными плоскостями

Расстояние между параллельными прямыми $Ax+By+Cz+D_1 = 0$, $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ и $Ax+By+Cz+D_2 = 0$.

$$\varrho = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку (x_0, y_0, z_0) на первой плоскости, т.е. выполнено $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$. Найдём расстояние от этой точки до другой прямой:

$$\varrho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1) + (D_2 - D_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

□

2.4.3 Уравнения прямой в пространстве

Параметрические уравнения прямой

Векторное *параметрические уравнения* прямой в пространстве:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{l}, \quad t \in (-\infty,\ +\infty),$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор некоторой фиксированной точки M_0, лежащей на прямой, $\vec{l}$ — ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой (называемый её *направляющим вектором*), $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки прямой.

Параметрические уравнения прямой в пространстве (покоординатная запись):

$$x = x_0 + m\,t,\ y = y_0 + n\,t,\ z = z_0 + p\,t, \quad t \in (-\infty,\ +\infty),$$

где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты некоторой фиксированной точки M_0, лежащей на прямой; $\vec{l} = (m,\ n,\ p)$ — координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

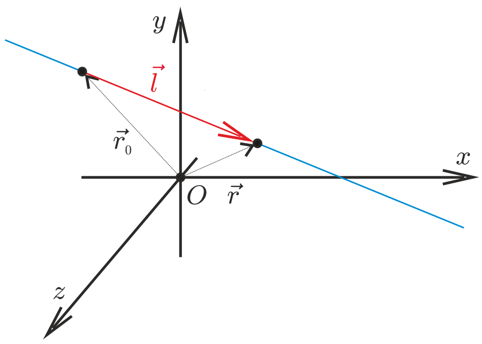


Рис. 2.29:

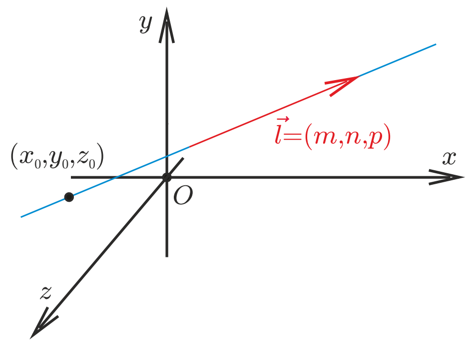


Рис. 2.30:

Канонические уравнения прямой

Канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — координаты некоторой фиксированной точки M_0, лежащей на прямой; $\vec{l}=(m,\ n,\ p)$ — координаты ненулевого вектора, коллинеарного этой прямой.

В случае $m=0$ прямую понимаем, как пересечение плоскостей $x=x_0$ и $\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, а в случае $m=n=0$ прямую понимаем, как $x=x_0$, $y=y_0$, z — любое.

Прямая, заданная пересечением плоскостей

Поскольку прямая является пересечением двух различных, непараллельных плоскостей, заданных соответственно общими уравнениями (см. рис. 2.31): $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то уравнение прямой можно задать системой этих уравнений:

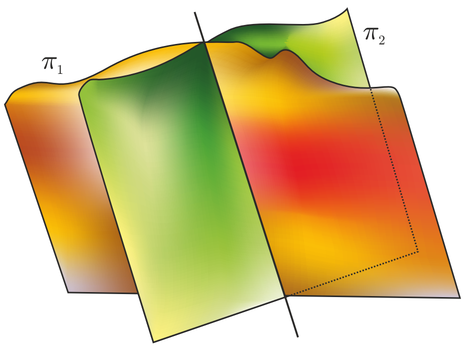


Рис. 2.31:

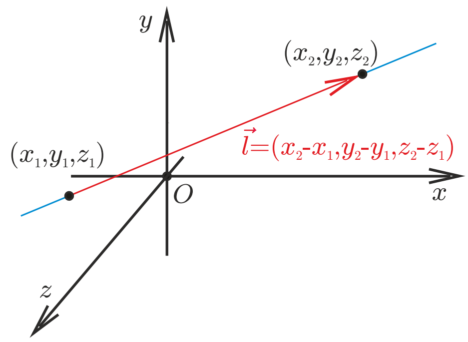


Рис. 2.32:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Уравнения прямой по двум различным точкам

Уравнения прямой (см. рис. 2.32), проходящей через две заданные различные точки (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

В случае $x_2=x_1$ прямую понимаем, как $x=x_1$ и $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, а в случае $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ прямую понимаем, как $x=x_1$, $y=y_1$, z — любое.

2.4.4 Взаимное расположение прямых. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Прямая в пространстве однозначно задаётся точкой $(x_0; y_0; z_0)$ и сонаправленным вектором $\vec{l} = (m; n; p)$. Уравнения прямой запишутся в виде:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Две прямые в пространстве могут располагаться следующим образом:

- пересекаются (лежат в одной плоскости),
- параллельны (лежат в одной плоскости),
- скрещиваются (не лежат в одной плоскости).

Разберём случай, когда прямые скрещиваются и найдём формулы для вычисления расстояние между прямыми в этом случае.

I способ. Расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD (см. рис. 2.33) можно найти, например, следующим образом: Восстановим перпендикулярную плоскость в произвольной точке первой прямой (на рисунке эта плоскость проведена через точку C) и спроектируем вторую прямую AB на эту плоскость (получаем прямую BA_1). Остаётся найти расстояние от этой точки до спроецированной прямой, т.е. высоту CC_1 в прямоугольном треугольнике A_1CE_1.

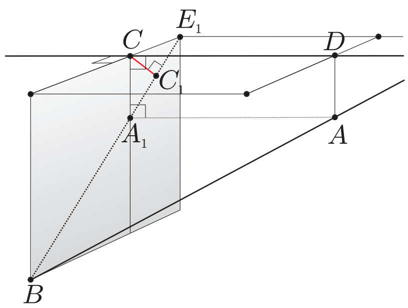


Рис. 2.33:

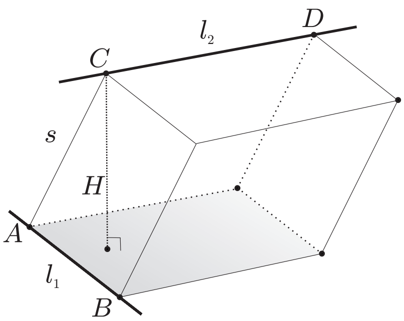


Рис. 2.34:

Это и будет расстоянием между скрещивающимися прямыми.

II способ. Поскольку нам даны две прямые, то у нас есть точка $(x_1; y_1; z_1)$ и сонаправленный вектор $\vec{l_1} = (m_1; n_1; p_1)$ первой прямой (см. рис. 2.34). и точка $(x_2; y_2; z_2)$ и сонаправленный вектор $\vec{l_2} = (m_2; n_2; p_2)$ второй прямой. У нас образовался параллелипипед на трёх векторах $\vec{l_1}$, $\vec{l_2}$, $\vec{s} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Расстояние между прямыми мы можем найти так: найдём объём параллелепипеда и поделим на площадь основания.

$$\varrho = \frac{|(\vec{s},\ \vec{l_1},\ \vec{l_2}|)}{|\vec{l_1} \times \vec{l_2}|}.$$

П р и м е р 2.4.5. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти расстояние от точки C_1 до плоскости AB_1C (см. рис. 2.35). Введём систему координат, как указано на рис. 2.35. Поскольку известно, что плоскость AB_1C пересекает координатные оси в точках A $(x_0 = 1)$, B_1 $(z_0 = 1)$, C $(y_0 = 1)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1.$$

Координаты точки $C_1(0; 1; 1)$. Поэтому искомое расстояние находим по формуле:

$$\varrho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

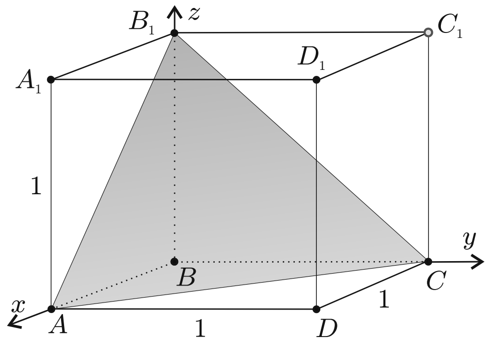


Рис. 2.35:

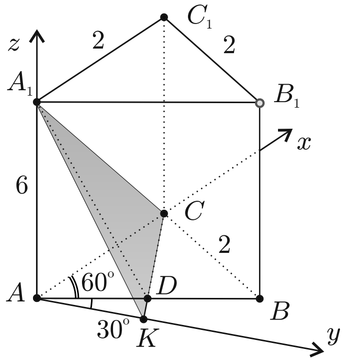


Рис. 2.36:

П р и м е р 2.4.6. Дана правильная треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ со сторонами $AC = 2$, $AA_1 = 6$. Точка D такова, что $AD = DB = 1$. Найти расстояние от точки B_1 до плоскости A_1CD (см. рис. 2.36). Введём систему координат, как указано на рис. 2.36. Угол ADC прямой, т.к. CD — медиана и высота в правильном треугольнике. Продолжим CD до пересечения с осью Oy в точке K. Тогда $AK = AD/\cos 30° = 2/\sqrt{3}$.

Поскольку известно, что плоскость A_1CK пересекает координатные оси в точках C $(x_0 = 2)$, K $(y_0 = 2/\sqrt{3})$, C $(z_0 = 6)$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2} + \frac{z}{6} = 1.$$

Координаты точки $B_1(1; \sqrt{3}; 6)$. Поэтому искомое расстояние находим по формуле:

$$\varrho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1/2 + 3/2 + 1 - 1|}{\sqrt{1/4 + 3/4 + 1/36}} = \frac{12}{\sqrt{37}}.$$

П р и м е р 2.4.7. Дана правильная пирамида $SABCD$. Известно, что $SA = \sqrt{5}$, $AB = 2$, точка M принадлежит ребру SC так, что $SM = MC$. Найти расстояние от точки S до плоскости ADM (см. рис. 2.37). Введём систему координат, как указано на рис. 2.37. Простые вычисления показывают, что $AC = 2\sqrt{2}$, $AO = OD = \sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника AOS находим высоту в пирамиде

$$H = SO = \sqrt{3}.$$

Поскольку M — серидина SC, то N — серидина OC (как проекция) и $MN = \sqrt{3}/2$. Следовательно $AN : AO = 3 : 2$, а из подобия треугольников $AMN \sim AEO$ находим $EO = \sqrt{3}/3$.

Поскольку известно, что плоскость ADM пересекает координатные оси в точках A $(x_0 = -\sqrt{2})$, D $(y_0 = -\sqrt{2})$, E $(z_0 = 1/\sqrt{3})$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\frac{x}{-\sqrt{2}} + \frac{y}{-\sqrt{2}} + \sqrt{3}z = 1.$$

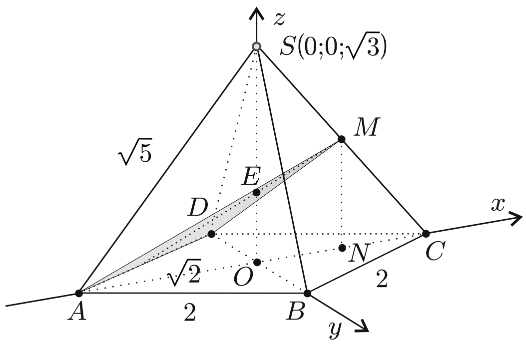


Рис. 2.37:

Координаты точки $S(0;0;\sqrt{3})$. Поэтому искомое расстояние находим по формуле:

$$\varrho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3-1|}{\sqrt{1/2 + 1/2 + 3}} = \frac{2}{2} = 1.$$

П р и м е р 2.4.8. На ребрах AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны точки E, F, G и H соответственно так, что $AE = B_1F = CG = D_1H = \frac{1}{3}$. Найдите объем пирамиды $EFGH$.

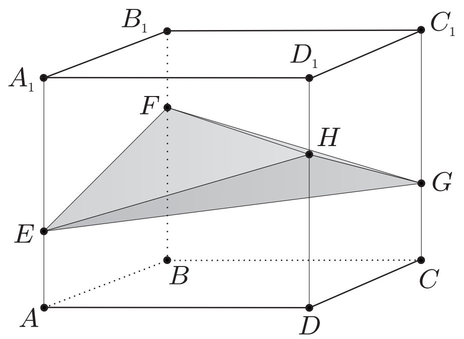


Рис. 2.38:

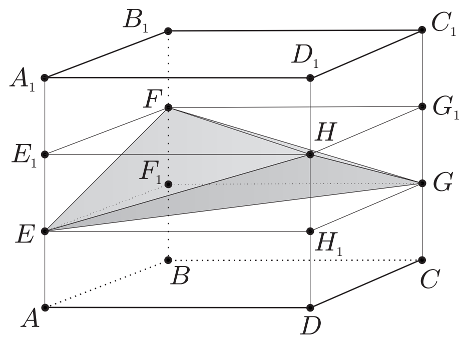


Рис. 2.39:

Доказательство. **I способ решения.** Отметим точки E_1, F_1, H_1, G_1 на рёбрах AA_1, BB_1, CC_1, HH_1 соответственно, так что $AE = EE_1 = E_1A_1$, $BF_1 = F_1F = FB_1$, $CG = GG_1 = G_1C_1$, $DH_1 = H_1H = HD_1$. Представим объём пирамиды следующим образом

$$V_{EFGH} =$$
$$= V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - V_{E_1FG_1HA_1B_1C_1D_1} - V_{EF_1GH_1ABCD} - V_{EGHH_1} - V_{EHE_1F} - V_{FG_1HG} - V_{EFGF_1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 4 \cdot V_{EGHH_1} = \frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3} \cdot HH_1 \cdot S_{EH_1G}\right) =$$
$$= \frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}.$$

II способ решения. Введём систему координат. Поместим начало координат в точку A. Ось Ox пустим по лучу AD, ось Oy — по лучу AB, ось Oz — по лучу AA_1, Тогда координаты точек примут вид:

$$E(0;0;1/3),\ F(0;1;2/3),\ G(1;1;1/3),\ H(1;0;2/3).$$

Положим

$$\vec{a} = \overrightarrow{EF} = (0;1;1/3),$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{EH} = (1;0;1/3),$$
$$\vec{c} = \overrightarrow{EG} = (1;1;0).$$

Найдём объём пирамиды $EFGH$, как шестая часть от объёма параллелипипеда, натянутого на вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

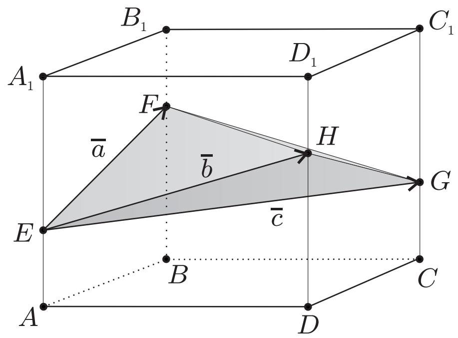


Рис. 2.40:

$$V_{EFGH} = \frac{1}{6} \quad \mathrm{mod} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \left| a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6} \left| 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9}.$$

□

2.4.5 Пучок и связка плоскостей

Пучок плоскостей

Пучок плоскостей — все плоскости, проходящие через линию пересечения двух различных, непараллельных плоскостей. Уравнение пучка плоскостей, то есть любой плоскости, проходящей через линию пересечения

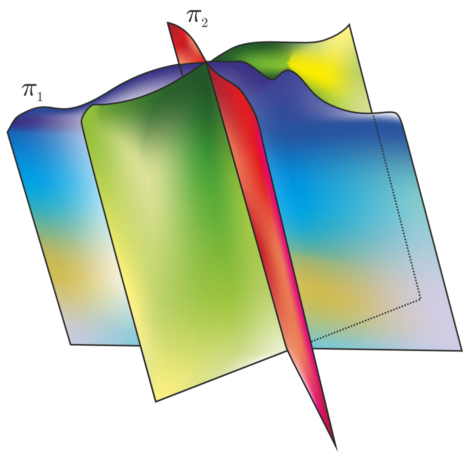


Рис. 2.41:

двух плоскостей, имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α и β — любые числа, не равные одновременно нулю. Уравнение самой этой линии можно найти из уравнения пучка, подставляя $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и решая получившуюся систему уравнений.

Связка плоскостей

Связка плоскостей — все плоскости, проходящие через точку пересечения трёх различных плоскостей, которые пеересекаются только по одной точке. Уравнение связки плоскостей, то есть любой плоскости, проходящей через точку пересечения трёх плоскостей, имеет вид:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где α, β и γ — любые числа, не равные одновременно нулю. Саму эту точку можно найти из уравнения связки, подставляя $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ и решая получившуюся систему уравнений.

П р и м е р 2.4.9. Найдите уравнение плоскости проходящей через прямую

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

и точку $(0, 0, 0)$.

Поскольку уравнение прямой заданно как пересечение двух плоскостей, то мы можем составить все уравнение всех плоскостей, проходящих через заданную прямую. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через заданную прямую:

$$\alpha(x + y + z - 2) + \beta(3x - 2y - z - 1) = 0.$$

Поскольку искомая плоскость проходит через точку $(0, 0, 0)$, то подставив её в уравнение пучка, получаем: $2\alpha + \beta = 0$. Например, подходит $\alpha = 1$, $\beta = -2$. Подставляя найденные α и β в уравнение пучка найдём искомую плоскость: $-5x + 5y + 3z = 0$.

Контрольные вопросы.

1. Запишите условие компланарности трёх векторов, при помощи смешанного произведения.
2. Запишите плоскость $x + y - z + 5 = 0$ в нормальном виде. Чему равно расстояние от начала координат до заданной плоскости?

Упражнения к 2.4

Упражнение 2.4.1. *Найдите расстояние от точки $A(1; -2; 0)$ до плоскости $3x - 4y + 5\sqrt{3}z - 7 = 0$.*

Упражнение 2.4.2. *Составьте уравнение плоскости, отсекающей на координатных осях Ox и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Oy, и проходящей через точку $P(2; -3; 3)$.*

Ответы: 2.4.1. $2/5$. **2.4.2**. $x + 2y + z - 4 = 0$.

Глава 3

Кривые второго порядка

3.1 Невырожденые кривые второго порядка

3.1.1 Эллипс

Определение и основные свойства

Определение 3.1.1. *Эллипс* — геометрическое место точек M евклидовой плоскости, для которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами*) постоянна (и больше расстояния между фокусами), то есть

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a, \quad |F_1F_2| < 2a.$$

Название эллипс произошло от др. -греч. $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$ — опущение, недостаток. Это связано с тем, что древние греки вели классификацию кривых второго порядка по эксцентриситету (см. ниже), а для эллипса эксцентриситет находится на интервале $(0; 1)$, т.е. древние греки воспринимали эллипс как недостаток до 1.

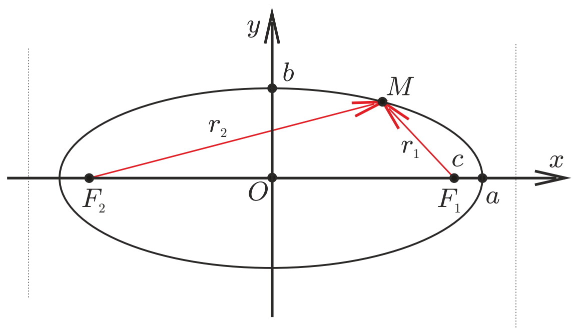


Рис. 3.1:

Проходящий через фокусы эллипса отрезок, концы которого лежат на эллипсе, называется *большой осью* данного эллипса. Длина большой оси равна $2a$ в уравнении.

Отрезок, перпендикулярный большой оси эллипса, проходящий через центральную точку большой оси, концы которого лежат на эллипсе, называется *малой осью* эллипса. Точка пересечения большой и малой осей эллипса называется его *центром*. Точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами* эллипса.

Определение 3.1.2. Отрезки, проведённые из центра эллипса к вершинам на большой и малой осях называются, соответственно, *большой полуосью* и *малой полуосью* эллипса, и обозначаются a и b.

Расстояния r_1 и r_2 от каждого из фокусов до данной точки на эллипсе называются *фокальными радиусами* в этой точке. Расстояние $c = \frac{|F_1F_2|}{2}$ называется *фокальным расстоянием.*

Найдём выражение фокального расстояния через величины большой и малой полуосей эллипса a и b. Выберем точку эллипса $M(0; b)$, по определению эллипса выполнено

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a \iff |F_1M| = a \iff \sqrt{(c-0)^2 + (0-b)^2} = a \iff c^2 = a^2 - b^2.$$

Определение 3.1.3. Величина $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ называется *эксцентриситетом.*

Диаметром эллипса называют произвольную хорду, проходящую через его центр. *Сопряжёнными диаметрами* эллипса называют пару его диаметров, обладающих следующим свойством: середины хорд, параллельных первому диаметру, лежат на втором диаметре. В этом случае и середины хорд, параллельных второму диаметру, лежат на первом диаметре.

Фокальным параметром $p = \frac{b^2}{a}$ называется половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной большой оси эллипса.

Отношение длин малой и большой полуосей называется *коэффициентом сжатия* эллипса или *эллиптичностью*: $k = \frac{b}{a}$. Величина, равная $(1-k) = \frac{a-b}{a}$, называется *сжатием эллипса.* Для окружности коэффициент сжатия равен единице, сжатие — нулю. Коэффициент сжатия и эксцентриситет эллипса связаны соотношением $k^2 = 1 - e^2$.

Каноническое уравнение эллипса.

Найдём уравнение эллипса в системе координат, изображенной на рис. 3.1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a \\
(x-c)^2+y^2 &= 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \\
a\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= a^2 + xc \\
x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
x^2b^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение называется *канононическим видом* эллипса.

Уравнения в параметрической форме

Эллипс можно представить уравнениями в параметрической форме, в которые входят тригонометрические функции. В прямоугольной системе координат, центр которой совпадает с центром эллипса, а ось абсцисс проходит через фокусы, уравнение эллипса представим в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\,\cos t \\ y = b\,\sin t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Касательная к элиппсу

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0), к произвольной кривой, заданной неявно $F(x,y) = 0$ имеет вид: $F'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$. Для эллипса, заданного в каноническом виде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнение касательной, проходящей через точку эллипса (x_0, y_0) имеет вид:

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y-y_0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{b^2} = 1.$$

Теорема 3.1.3. *Расстояния от точки эллипса $M(x,y)$ до её фокусов, т.е. фокальные радиус-вектора r_1 и r_2 вычисляются по формулам:*

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \\
= (c^2+b^2) - 2xc + x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 - 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2 = \\
= a^2 - 2eax + e^2x^2 = (a-ex)^2.
\end{aligned}$$

Поскольку $a - ex \geqslant 0$ выполнено для любой точки $M(x,y)$ эллипса, то приходим к первому равенству: $r_1 = a - ex$.

Второе равенство $r_2 = a + ex$ доказывается аналогично. □

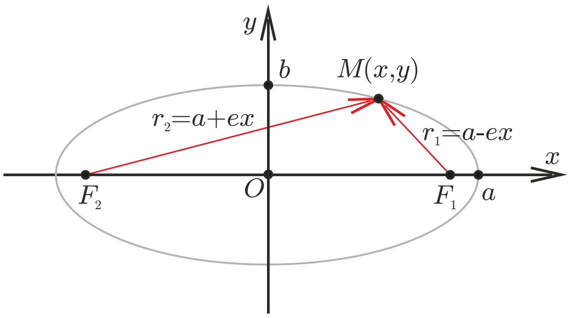


Рис. 3.2:

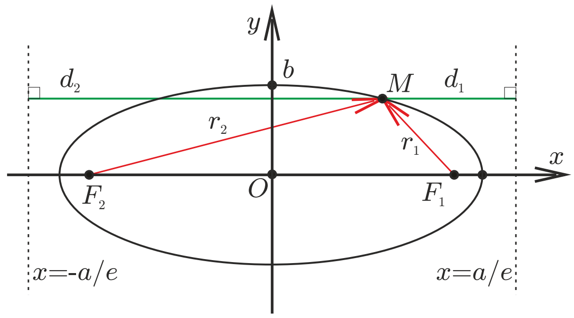


Рис. 3.3:

Для каждого из фокусов существует прямая, называемая *директрисой*, такая, что отношение расстояния от произвольной точки эллипса до его фокуса к расстоянию от этой точки до данной прямой равно эксцентриситету эллипса.

Покажем, что таким свойством обладают прямые $x = \pm\frac{a}{e}$. Действительно, расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой $x = \frac{a}{e}$ равно $d_1 = \frac{a}{e} - x$, а до прямой $x = -\frac{a}{e}$ равно $d_2 = \frac{a}{e} + x$. Откуда следуют равенства

$$\frac{r_1}{d_1} = e, \quad \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Весь эллипс лежит по ту же сторону от такой прямой, что и фокус. Уравнения директрис эллипса в каноническом виде записываются как $x = \pm\frac{p}{e(1+e)}$ для фокусов $\left(\mp\frac{p}{1+e}, 0\right)$ соответственно. Расстояние между фокусом и директрисой равно $\frac{p}{e}$.

П р и м е р 3.1.1. Найдите касательные, проведённые к эллипсу $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ из точки а) $N\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) $M(3; 3)$.

Решение. Поскольку точка N принадлежит эллипсу, то уравнение касательной принимает вид:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1.$$

Точка M, как легко проверить, не принадлежит эллису. Напишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку M:

$$A(x-3) + B(y-3) = 0 \Longleftrightarrow Ax + By - 3(A+B) = 0.$$

Подставив в уравнение $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, получаем

$$2A^2 + B^2 = 9(A+B)^2 \Longleftrightarrow 7A^2 + 18AB + 8B^2 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, получим $A/B = -2$ и $A/B = -4/7$. таким образом приходим к двум касательным:

$$\begin{aligned} &-2(x-3) + (y-3) = 0, \\ &-4(x-3) + 7(y-3) = 0. \end{aligned}$$

□

3.1.2 Гипербола

Определение и основные свойства

Определение 3.1.4. *Гипербола* — геометрическое место точек M евклидовой плоскости, для которых абсолютное значение разности расстояний от M до двух выделенных точек F_1 и F_2 (называемых *фокусами*) постоянно (и меньше расстояния между фокусами), то есть

$$\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a, \quad |F_1F_2| > 2a > 0.$$

Название гипербола произошло от греч. $\upsilon\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\eta$ — избыток. Это связано с тем, что древнии греки вели классификацию кривых второго порядка по эксцентриситету (см. ниже), а для гиперболы эксцентриситет находится на интервале $(1; +\infty)$, т.е. древнии греки воспринимали эллипс как избыток после 1.

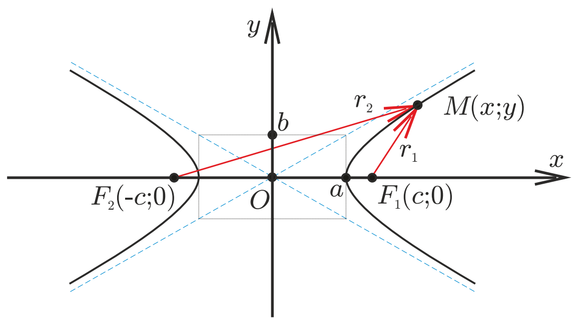


Рис. 3.4:

Гипербола состоит из двух отдельных кривых, которые называют *ветвями*. Ближайшие друг к другу точки двух ветвей гиперболы называются *вершинами*. Кратчайшее расстояние между двумя ветвями гиперболы называется *большой осью гиперболы*. Середина большой оси называется *центром гиперболы*. Расстояние от центра гиперболы до одной из вершин называется *большой полуосью гиперболы*. Обычно обозначается a. Расстояние от центра гиперболы до одного из фокусов называется *фокальным расстоянием*. Обычно обозначается c. Оба фокуса гиперболы лежат на продолжении большой оси на одинаковом расстоянии от центра гиперболы. Прямая, содержащая большую ось гиперболы, называется *действительной* или *поперечной осью гиперболы*. Прямая, перпендикулярная действительной оси и проходящая через её центр называется *мнимой* или *сопряженной осью гиперболы*. Отрезок между фокусом гиперболы и гиперболой, перпендикулярный её действительной оси, называется *фокальным параметром*. Расстояние от фокуса до асимптоты гиперболы называется прицельным параметром. Обычно обозначается b. В задачах, связанных с движением тел по гиперболическим траекториям расстояние от фокуса до ближайшей вершины гиперболы называется *перицентрическим расстоянием* Обычно обозначается r_p.

Каноническое уравнение гиперболы

Положим $b^2 = c^2 - a^2$. Найдём уравнение гиперболы в системе координат, изображенной на рис. 3.4. Действительно,

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= -a^2 + xc \\
x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2-c^2) \\
-x^2b^2 + a^2y^2 &= -a^2b^2 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Последнее уравнение называется *канононическим видом* гиперболы.

Асимптоты гиперболы

Покажем, что прямые вида $y = \pm\frac{bx}{a}$ — асимпототы гиперболы, записанной в каноническом виде. Действительно,

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\frac{b\,x}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm\frac{b\,x}{a}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \pm\frac{b\,x}{a} + O\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{b\,x}{a} + o(1), \quad x \to \infty.$$

Уравнения в параметрической форме

Подобно тому, как эллипс может быть представлен уравнениями в параметрической форме, в которые входят тригонометрические функции, гипербола в прямоугольной системе координат, центр которой совпадает с её центром, а ось абсцисс проходит через фокусы, может быть представлена уравнениями в параметрической форме, в которые входят гиперболические функции.

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \qquad -\infty < t < +\infty.$$

В первом уравнении знак «+» соответствует правой ветви гиперболы, а «-» — её левой ветви.

Касательная к гиперболе

Для гиперболы, заданной в каноническом виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнение касательной, проходящей через точку гиперболы (x_0, y_0) имеет вид:

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x_0\, x}{a^2} - \frac{y_0\, y}{b^2} = 1.$$

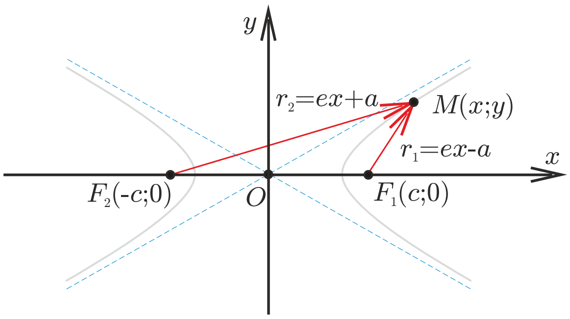


Рис. 3.5: $r_2 - r_1 = 2a$

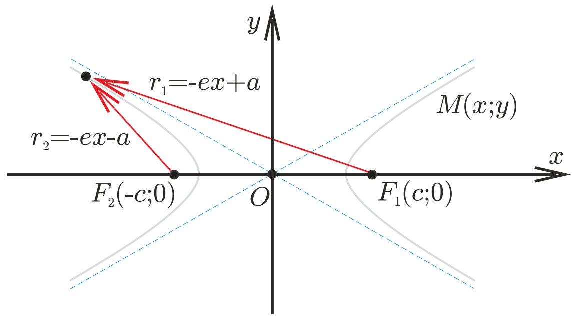


Рис. 3.6: $r_1 - r_2 = 2a$

Теорема 3.1.4.
- *Для точек $M(x, y)$ правой ветви гиперболы (см. рис. 3.5) фокальные радиус-векторы r_1 и r_2 вычисляются по формулам:*

$$r_1 = ex - a, \quad r_2 = ex + a.$$

- *Для точек $M(x, y)$ левой ветви гиперболы (см. рис. 3.6) фокальные радиус-векторы r_1 и r_2 вычисляются по формулам:*

$$r_1 = -ex + a, \quad r_2 = -ex - a.$$

Доказательство. Пусть $M(x, y)$ точка на правой ветви гиперболы. Тогда

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$$
$$= (c^2 - b^2) - 2xc + x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = a^2 - 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2 =$$
$$= a^2 - 2eax + e^2x^2 = (a - ex)^2.$$

Поскольку $ex - a \geqslant 0$ выполнено для любой точки $M(x, y)$ гиперболы, то приходим к первому равенству: $r_1 = a - ex$. Второе равенство $r_2 = a + ex$ доказывается аналогично.

Утверждения для точек левой ветви гиперболы получаем аналогичным образом. □

3.1.3 Парабола

Определение и основные свойства

Определение 3.1.5. *Парабола* — геометрическое место точек M евклидовой плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой *директрисой* параболы) и данной точки (называемой *фокусом* параболы).

Теорема 3.1.5. *Если за ось абсцисс принять перпендикуляр, опущенный из фокуса на директрису, а начало координат поместить посредине между фокусом и директрисой (см. рис. 3.7), то уравнение парболы примет вид:*

$$y^2 = 2px.$$

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ произвольная точка параболы.

Тогда уравнение директрисы будет $x = -p/2$. Следовательно, справедливо

$$r = d \iff \sqrt{(x-p/2)^2 + y^2} = x + p/2 \iff$$
$$\iff y^2 = 2px.$$

□

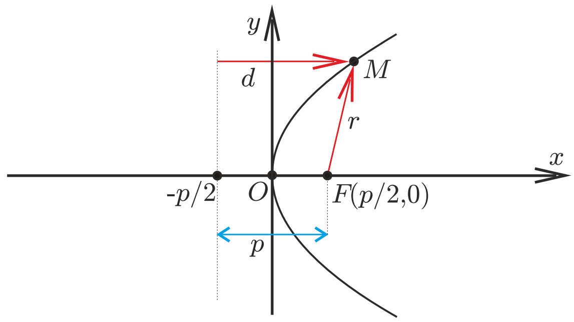


Рис. 3.7:

Число p в каноническом уравнении параболы называется *фокальным параметром* параболы. Поскольку расстояние от произвольной точки параболы до директрисы равно $d = x + \frac{p}{2}$, то можно сделать следующий вывод:

Расстояния от точки эллипса $M(x,y)$ до фокуса, т.е. фокальный радиус-вектор r вычисляется по формуле:

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Касательная к параболе

Для параболы, заданной в каноническом виде $y^2 = 2px$ уравнение касательной, проходящей через точку параболы (x_0, y_0) имеет вид:

$$p(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0 \iff px - px_0 + y_0^2 = y_0 y \iff$$
$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Теорема 3.1.6 (Оптическое свойство параболы)**.** *Пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь в параболе, собирается в её фокусе (см. рис. 3.9). И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных её оси лучей.*

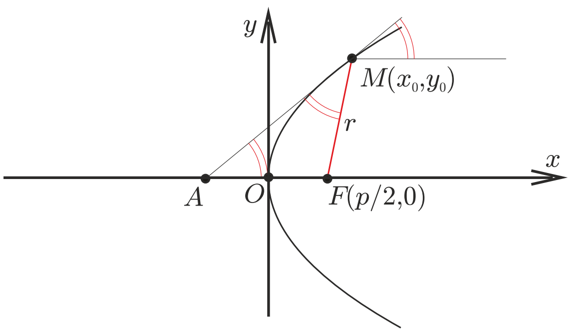


Рис. 3.8:

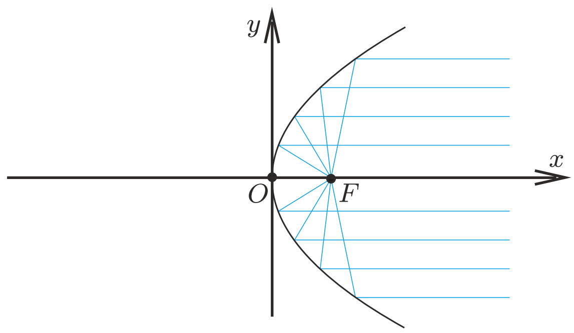


Рис. 3.9:

Доказательство. Проведём касательную через прозвольную точку $M(x_0, y_0)$ параболы (см. рис. 3.8). Обозначим через A — точку пересечения с осью Ox. Достаточно доказать, что треугольник AFM равнобедренный (F — как и ранее фокус параболы). Поскольку уравнение касательной к параболе, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ имеет вид $y_0 y = p(x + x_0)$, то можно найти координаты точки $A(-x_0, 0)$. Следовательно

$$AF = x_0 + \frac{p}{2} = r = FM.$$

□

Замечание 3. *Основное оптическое свойство параболы:* при распространении света в плоскости параболы, если в ее фокусе поместить источник света, лучи света после отражения от параболы все пойдут параллельно ее оси (см. рис. 3.9). Этим объясняется то, что, например, прожекторам придают форму поверхности, получающейся от вращения параболы вокруг ее оси.

Чуть сложнее выводится аналогичное *оптическое свойство эллипса* и гиперболы: так, у эллипса лучи света, вышедшие из одного фокуса, после отражения от эллипса все собираются в другом фокусе (см. рис. 3.10). Параболу можно рассматривать как эллипс, у которого один из фокусов удален на бесконечность, поэтому из оптического свойства эллипса в пределе получается оптическое свойство параболы.

Оптическое свойство гиперболы: Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается этой (в которой находится источник света) ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе (см. рис. 3.11).

Контрольные вопросы.

1. Напишите канонический вид эллипса, гиперболы, параболы.
2. Выведите уравнение касательной к гиперболе $2x^2 - y^2 = 1$, проходящей через точку $(1, -1)$, лежащую на гиперболе.
3. Напишите параметрическое уравнение для кривой $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y - 9 = 0$.
4. Найдите эксцентриситет эллипса $x^2/9 + y^2 = 16$.
5. Найдите эксцентриситет гиперболы $25x^2 - 9y^2 = 1$.
6. В какую точку плоскости Oxy попадают все лучи вышедшие параллельно оси Ox с бесконечно больших значений x, отраженные от кривой $y^2 + 4y - 6x = 0$.

Упражнения к 3.1

Упражнение 3.1.1. *Вывести условие, при котором прямая* $Ax + By + C = 0$ *касается эллипса* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Упражнение 3.1.2. *Вывести условие, при котором прямая* $Ax + By + C = 0$ *касается гиперболы* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Упражнение 3.1.3. *Вывести условие, при котором прямая* $Ax + By + C = 0$ *касается параболы* $y^2 = 2px$.

Упражнение 3.1.4. *Докажите оптическое свойство эллипса.*

Упражнение 3.1.5. *Докажите оптическое свойство гиперболы.*

Упражнение 3.1.6. *Составьте каноническое уравнение гиперболы, если расстояние между вершинами равно* 2, *а расстояние между фокусами равно* 4. *Напишите каноническое уравнение эллипса, если фокусы эллипса совпадают с фокусами полученной гиперболы и эксцентриситет эллипса* $\varepsilon = 1/2$.

Упражнение 3.1.7. *Докажите, что произведение расстояний от любой точки данной гиперболы до двух её асимптот — величина постоянная. Найдите эту величину для гиперболы, заданной в каноническом виде.*

Упражнение 3.1.8. *Найдите угол между двумя касательными, проведёнными из точки* $(1, 2)$ *к эллипсу, заданному уравнением* $x^2 + xy + 2y^2 = 1$.

Упражнение 3.1.9. *Найдите общии касательные гиперболы* $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ *и параболы* $y^2 = 24\sqrt{2}\,x$.

Упражнение 3.1.10. *Найдите центр, фокусы и дирекрисы линии пересечения цилиндра* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^9}{16} = 1$ *и плоскости* $4x - 3z = 0$.

Ответы: 3.1.1 $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$. *Указание:* Из сравнения уравнений касательных $\frac{x_0\,x}{a^2} + \frac{y_0\,y}{a^2} = 1$ и $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$ приходим к системе $\begin{cases} \frac{x_0}{a^2} = -\frac{A}{C}, \\ \frac{y_0}{b^2} = -\frac{B}{C} \end{cases}$. остаётся выразить из системы (x_0, y_0) и подставить в уравнение эллипса. **3.1.2** $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$. **3.1.3** $B^2p = 2AC$. **3.1.4** *Указание:* докажите равенство углов (см. рис. 3.10). **3.1.5** *Указание:* докажите равенство углов (см. рис. 3.11). **3.1.6** $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$; $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. **3.1.7** $\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. **3.1.8** $\arccos(23/\sqrt{1649})$. **3.1.9** $2x \pm y + 3\sqrt{2} = 0$. *Указание:* воспользоваться результатами задач 3.1.2 и 3.1.2. **3.1.10** фокусы $F_{1,2} = (0; \pm\sqrt{7}; 0)$ центр $(0; 0; 0)$ директрисы $(x; y; z)^T = (\frac{3}{5}t; \pm\frac{16}{\sqrt{7}}; \frac{4}{5}t)$, $t \in \mathbb{R}$. *Указание:* воспользоваться преобразованием поворота в плоскости xOz, которое задаётся формулой $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$.

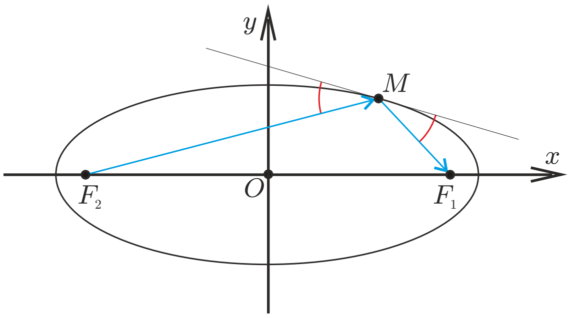


Рис. 3.10:

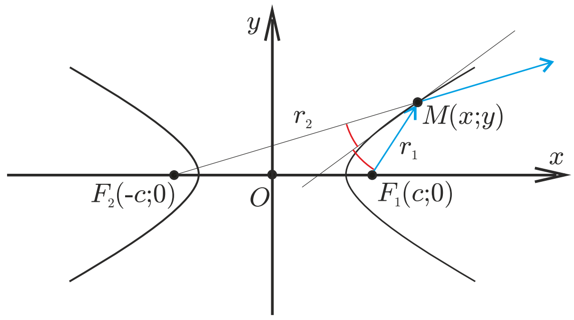


Рис. 3.11:

3.2 Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

Определение 3.2.1. Кривая второго порядка — геометрическое место точек плоскости, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида $F(x,y)=0$, где

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0, \tag{3.2.1}$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля.

Общее уравнение кривой второго порядка можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}+a_0=X^TQX+2\cdot LX+a_0=$$

$$=\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1\end{pmatrix}=0.$$

Матрица $Q=Q_{2\times 2}$ называется матрицей *квадратичной* части, матрица $L=L_{1\times 2}$ матрица *линейной* части.

Лемма 2. *Для многочлена второй степени от переменных x и y вида* (3.2.1) *на плоскости можно построить прямоугольную декартову систему координат $Ox'y'$ так, что после замены переменных x и y на переменные x' и y' исходный многочлен примет один из следующих трех видов:*

1. $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\tau, \quad \lambda_1\cdot\lambda_2\neq 0;$

2. $\lambda_2(y')^2+2b_1x', \quad \lambda_2\cdot b_1\neq 0;$

3. $\lambda_2(y')^2+\tau, \quad \lambda_2\neq 0.$

Доказательство. **I**. Докажем, что поворотом координатных осей на подходящим образом выбранный угол всегда можно добиться того, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат обратился в нуль. Пусть $a_{12}=0$, тогда поворот не требуется. Пусть $a_{12}\neq 0$, тогда повернем оси координат вокруг точки O (см. рис. 3.12). Эта операция, как нам известно из пункта 2.3.6, описывается следующими формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y\end{pmatrix}$$

При этом координатные оси исходной системы Oxy поворачиваются на угол α. Заменим переменные x и y их выражениями через X и Y и вычислим коэффициент a'_{12} при произведении XY. Он равен

$$2(-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+a_{22}\sin\alpha\cos\alpha)=(a_{22}-a_{11})\sin 2\alpha+2a_{12}\cos 2\alpha.$$

Угол α мы хотим выбрать так, чтобы коэффициент a_{12} обращался в нуль, т.е.

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}.$$

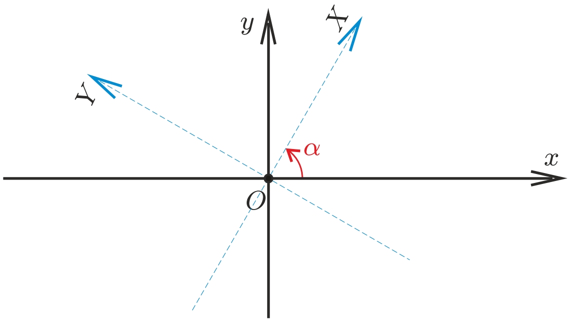


Рис. 3.12:

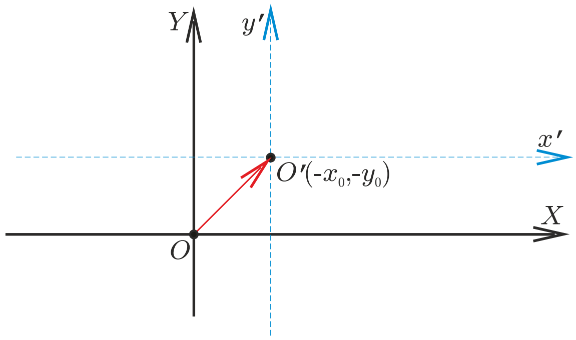


Рис. 3.13:

Полученное уравнение разрешимо относительно α, следовательно указанным преобразованием всегда можно добиться обращения в нуль нужного коэффициента.

II. Приступая ко второму этапу преобразования, будем считать, что исходный многочлен $F(x,y)$ после поворота имеет вид

$$F'(X,Y) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2b_1 X + 2b_2 Y + b_0, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| \neq 0.$$

Можем считать, что $\lambda_2 \neq 0$, так как иначе достаточно сделать замену координат X и Y. Покажем, что существует параллельный перенос такой, что уравнение примет один из трёх видов указанных в условии теоремы.

Переносом начала координат можно достичь дальнейшего упрощения вида многочлена $F'(X,Y)$. Эта операция описывается следующими формулами:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Координатные оси новой системы $O'x'y'$ получаются из координатных осей системы OXY параллельным переносом в точку $(-x_0, -y_0)$ (см. рис. 3.13).

Укажем конкретные значения x_0 и y_0. Возможны три случая

1. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тогда выделив полные квадраты по переменным X и Y

$$F'(X,Y) = \lambda_1 \left(X + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(Y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right),$$

и полагая

$$x_0 = \frac{b_1}{\lambda_1}, \quad y_0 = \frac{b_2}{\lambda_2},$$

получаем

$$\boxed{F'(x',y') = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \tau.}$$

2. Пусть $\lambda_1 = 0$, $b_1 \neq 0$. Тогда выделив полный квадрат по переменной Y

$$F'(X,Y) = \lambda_2 \left(Y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_1 X + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right),$$

и полагая

$$x_0 = \frac{1}{2b_1}\left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right), \quad y_0 = \frac{b_2}{\lambda_2},$$

получаем

$$\boxed{F'(x',y') = \lambda_2 (y')^2 + 2b_1 x'.}$$

3. Пусть $\lambda_1 = 0$, $b_1 = 0$. Тогда выделив полный квадрат по переменной y

$$F'(X,Y) = \lambda_2 \left(Y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(b_0 - \frac{b_2^2}{\lambda_2}\right),$$

и полагая

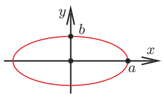
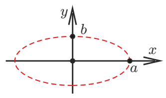
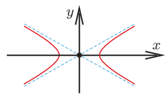
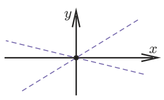
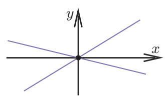
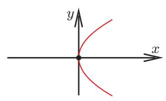
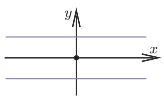
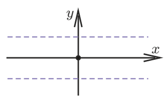
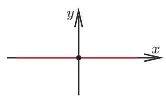
$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{b_2}{\lambda_2},$$

получаем

$$\boxed{F'(x',y') = \lambda_2 (y')^2 + \tau.}$$

□

Теорема 3.2.7. *Для произвольной кривой второго порядка существует система координат, в которой исходное уравнение принимает один из девяти видов. Перечислим их в таблице*

Кривые второго порядка		
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\boxed{1.}$ Эллипс 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $\boxed{2.}$ Мнимый эллипс 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\boxed{3.}$ Гипербола 
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\boxed{4.}$ Пара мнимых пересекающихся прямых 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\boxed{5.}$ Пара пересекающихся прямых 	$y^2 = 2px$ $\boxed{6.}$ Парабола 
$y^2 - a^2 = 0$ $\boxed{7.}$ Пара параллельных 	$y^2 + a^2 = 0$ $\boxed{8.}$ Пара мнимых параллельных 	$y^2 = 0$ $\boxed{9.}$ Пара совпадающих прямых 
Везде a, b, $p > 0$, в $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ дополнительно $a \geqslant b$.		

Доказательство. Согласно лемме 2 разберём три случая $\boxed{1}$ – $\boxed{3}$:

$\boxed{1}$ **1** λ_1, λ_2 — одного знака, τ — противоположного. Эллипс.

2 λ_1, λ_2, τ — одного знака. Мнимый эллипс.

3 λ_1, λ_2 — одного знака, $\tau = 0$. Пара пересекающихся мнимых прямых.

4 λ_1, λ_2 — разных знаков, $\tau \neq 0$. Гипербола.

5 λ_1, λ_2 — разных знаков, $\tau = 0$. Пара пересекающихся прямых.

$\boxed{2}$ **6** Парабола.

$\boxed{3}$ **7** $\lambda_2 \cdot \tau < 0$. Пара параллельных прямых.

8 $\lambda_2 \cdot \tau > 0$. Пара мнимых параллельных прямых.

9 $\tau = 0$. Пара совпадающих прямых.

□

Замечание 4. Кривая второго порядка вполне определяется пятью своими точками, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой. Уравнение кривой, проходящей через точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и (x_5, y_5):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Кривая, заданная пятью точками вырождается в том и только в том случае, когда три из заданных точек лежат на одной прямой.

П р и м е р 3.2.1. Приведите кривую второго порядка к каноническому виду

$$13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + (6\sqrt{3} - 26)x + (6\sqrt{3} - 14)y + 4 - 6\sqrt{3} = 0.$$

Напишите преобразование координат в которых кривая второго порядка принимает канонический вид. Найдите уравнение директрис для исходного уравнения.

Доказательство. Найдём угол поворота, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат обратился в нуль

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{13 - 7}{-6\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом $2\alpha = -\pi/3 + \pi k$. Положим $k = 1$, тогда $2\alpha = 2\pi/3$, т.е. $\alpha = \pi/3$. Сделаем поворот на угол $\pi/3$ (см. рис. 3.14).

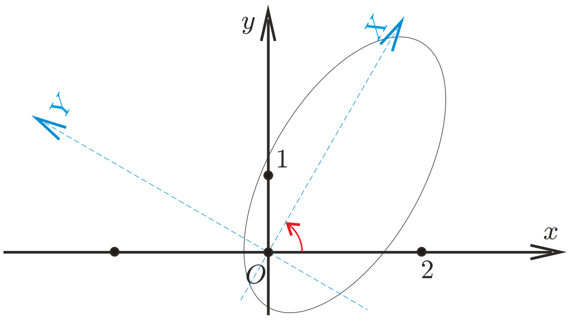


Рис. 3.14:

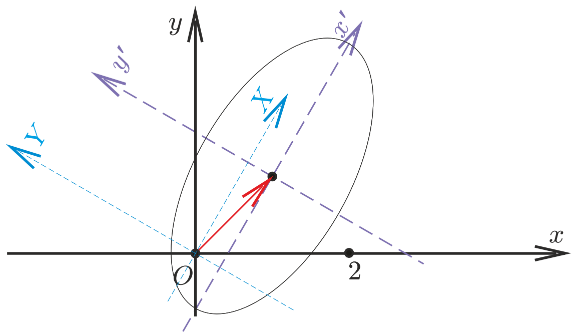


Рис. 3.15:

$$\begin{cases} x = \cos\alpha \cdot X - \sin\alpha \cdot Y, \\ y = \sin\alpha \cdot X + \cos\alpha \cdot Y, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot X - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Y, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y. \end{cases}$$

Получаем, что исходное уравнение преобразуется в

$$13\left(\frac{1}{2} \cdot X - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Y\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} \cdot X - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y\right) + 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y\right)^2 +$$
$$+ (6\sqrt{3} - 26)\left(\frac{1}{2} \cdot X - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Y\right) + (6\sqrt{3} - 14)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X + \frac{1}{2} \cdot Y\right) + 4 - 6\sqrt{3} = 0.$$

Выпишем коэффициенты при переменных:

$$
\begin{array}{l|l}
X^2: & 13\cdot\frac14-6\sqrt3\cdot\frac{\sqrt3}{4}+7\cdot\frac34=4\\
XY: & 13\cdot\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)-6\sqrt3\cdot\left(\frac14-\frac34\right)+7\cdot\frac{\sqrt3}{2}=0\\
Y^2: & 13\cdot\frac34-6\sqrt3\cdot\left(-\frac{\sqrt3}{4}\right)+7\cdot\frac14=16\\
X: & 3\sqrt3-13+9-7\sqrt3=-4-4\sqrt3\\
Y: & -9+13\sqrt3+3\sqrt3-7=-16+16\sqrt3\\
X^0Y^0: & 4-6\sqrt3.
\end{array}
$$

Отметим, что коэффициент при степени XY мы могли бы не считать, поскольку выбор угла α был как раз из условия, чтобы данный коэффициент равнялся бы нулю. Исходное уравнение в переменных X и Y принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&4X^2+16Y^2-4(1+\sqrt3)X+16(\sqrt3-1)Y+4-6\sqrt3=0\Longleftrightarrow\\
&4\left(X-\frac{1+\sqrt3}{2}\right)^2+16\left(Y-\frac{1-\sqrt3}{2}\right)^2-16=0\Longleftrightarrow\\
&\frac{x'^2}{2^2}+y'^2=1,
\end{aligned}
$$

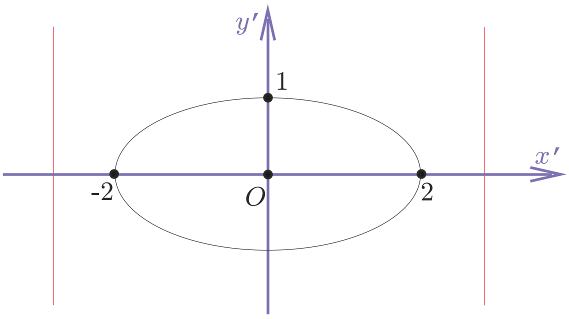


Рис. 3.16:

Здесь мы сделали параллельный перенос начала координат (см. рис. 3.15), т.е. замену вида:

$$
\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X-\frac{1+\sqrt3}{2}\\Y-\frac{1-\sqrt3}{2}\end{pmatrix}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'+\frac{1+\sqrt3}{2}\\y'+\frac{1-\sqrt3}{2}\end{pmatrix}.
$$

Выпишем преобразование, которое приводит исходное уравнение к каноническому виду:

$$
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'+\frac{1+\sqrt3}{2}\\y'+\frac{1-\sqrt3}{2}\end{pmatrix}=
$$
$$
=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.
$$

Поскольку обратная матрица к $\begin{pmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}$ является $\begin{pmatrix}\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}$, то обратное преобразование, т.е. выражение переменных x', y' через x, y, запишется в следующем виде:

$$
\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.
$$

Для эллипса $\frac{x'^2}{2^2}+y'^2=1$ находим, $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{2^2-1}=\sqrt3$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt3}{2}$. Уравнение директрис принимает вид $x'=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{4}{\sqrt3}$ (см. рис. 3.16). Таким образом в исходной системе координат уравнение директрис запишем в параметрическом виде:

$$
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12&-\frac{\sqrt3}{2}\\\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pm\frac{4}{\sqrt3}\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=
$$
$$
=\begin{pmatrix}\left(1\pm\frac{2}{\sqrt3}\right)-\frac{\sqrt3}{2}t\\(1\pm2)+\frac{t}{2}\end{pmatrix}.
$$

Можно перейти от параметрического вида прямой к каноническому. Для этого достаточно сложить второе уравнение, умноженное на $\sqrt{3}$, с первым.

$$x + \sqrt{3}y = \left(1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}(1 \pm 2).$$

Таким образом уравнение директрис следующие:

$$x + \sqrt{3}y = 1 + \frac{11}{3}\sqrt{3},$$
$$x + \sqrt{3}y = 1 - \frac{5}{3}\sqrt{3}.$$

$\square$

П р и м е р 3.2.2. Приведите кривую второго порядка к каноническому виду

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 - 40x - 70y + 75 = 0.$$

Напишите преобразование координат в которых кривая второго порядка принимает канонический вид. Если кривая распадается, то выписать соответствующее разложение.

Доказательство. Найдём угол поворота, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат обратился в нуль

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{4 - 11}{24} = -\frac{7}{24}.$$

Справедливо

$$\frac{1}{\cos^2 2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha = 1 + \frac{24^2}{7^2} = \frac{25^2}{7^2}.$$

Откуда находим $\cos 2\alpha = \pm 7/25$. Выберем здесь α так, чтобы был знак минус, т.е. $\cos 2\alpha = -7/25$. Из очевидного равенства

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin\alpha \cos\alpha}$$

делаем вывод о том, что в дальнейшем нам надо будет выбрать знаки у $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одинаковые, поскольку $\operatorname{ctg} 2\alpha < 0$ и $\cos 2\alpha < 0$. Далее

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Но поскольку мы должны выбрать одинаковые знаки у синуса и косинуса, выбираем

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \frac{4}{5}.$$

Этими двумя равенствами угол α однозначно определяется. Сделаем поворот на угол α (см. рис. 3.17).

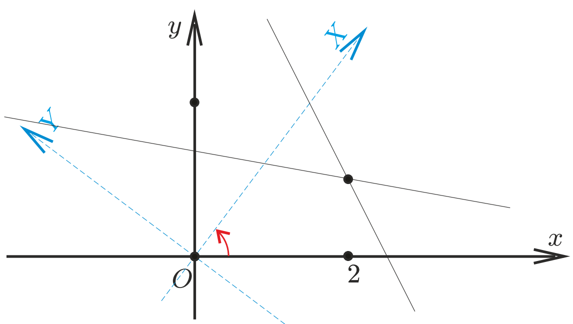


Рис. 3.17:

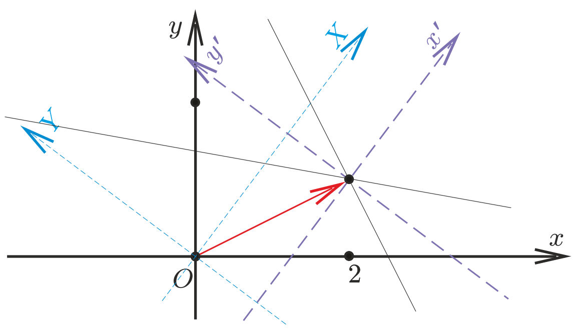


Рис. 3.18:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cos\alpha\cdot X-\sin\alpha\cdot Y,\\ y=\sin\alpha\cdot X+\cos\alpha\cdot Y,\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{3}{5}\cdot X-\frac{4}{5}\cdot Y,\\ y=\frac{4}{5}\cdot X+\frac{3}{5}\cdot Y.\end{array}\right.$$

Получаем, что исходное уравнение преобразуется в

$$4\left(\frac{3}{5}\cdot X-\frac{4}{5}\cdot Y\right)^2+24\left(\frac{3}{5}\cdot X-\frac{4}{5}\cdot Y\right)\left(\frac{4}{5}\cdot X+\frac{3}{5}\cdot Y\right)+11\left(\frac{4}{5}\cdot X+\frac{3}{5}\cdot Y\right)^2-$$
$$-40\left(\frac{3}{5}\cdot X-\frac{4}{5}\cdot Y\right)-70\left(\frac{4}{5}\cdot X+\frac{3}{5}\cdot Y\right)+75=0.$$

Выпишем коэффициенты при переменных:

$$\begin{array}{l|l} X^2: & 4\cdot\frac{9}{25}+24\cdot\frac{12}{25}+11\cdot\frac{16}{25}=20\\ XY: & -4\cdot\frac{24}{25}-24\cdot\frac{7}{25}+11\frac{24}{25}=0\\ Y^2: & 4\cdot\frac{16}{25}-24\cdot\frac{12}{25}+11\cdot\frac{9}{25}=-5\\ X: & -40\cdot\frac{3}{5}-70\cdot\frac{4}{5}=-80\\ Y: & 40\cdot\frac{4}{5}-70\cdot\frac{3}{5}=-10\\ X^0Y^0: & 75.\end{array}$$

Отметим, что коэффициент при степени XY мы могли бы не считать, поскольку выбор угла α был как раз из условия, чтобы данный коэффициент равнялся бы нулю. Исходное уравнение в переменных X и Y принимает вид:

$$\begin{aligned}&20X^2-5Y^2-80X-10Y+75=0\Longleftrightarrow\\&4X^2-Y^2-16X-2Y+15=0\Longleftrightarrow\\&4\left(X-2\right)^2-\left(Y+1\right)^2=0\Longleftrightarrow\\&4x'^2-y'^2=0,\end{aligned}$$

Здесь мы сделали параллельный перенос начала координат (см. рис. 3.18), т.е. замену вида:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X-2\\Y+1\end{pmatrix}\quad\Longleftrightarrow\quad\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'+2\\y'-1\end{pmatrix}.$$

Выпишем преобразование, которое приводит исходное уравнение к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'+2\\y'-1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

Итого, кривая $4x'^2-y'^2=0$ распадается на две пересекающиеся прямые $(2x'-y')(2x'+y')=0$ или в исходной системе координат $(2x+y-5)(2x+11y-15)=0$. □

Центр кривой второго порядка

Определение 3.2.2. Точкой, симметричной точке M относительно точки $C(x_0,y_0)$ называется точка M', обладающая тем свойством, что точка C есть середина отрезка MM'. Точка C называется центром симметрии (или просто центром) данной кривой, если, какова бы ни была точка M, лежащая на этой линии, точка M', симметричная точке M относительно точки C, также лежит на данной кривой (см. рис. 3.19).

Для кривой второго порядка $F(x,y)=0$, где $F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$ и $|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{22}|\neq0$ рассмотрим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}F'_x(x,y)=0,\\F'_y(x,y)=0,\end{array}\right.$$

которая равносильна:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

Для кривой второго порядка может оказаться так, что данная система имеет единственное решение (например для эллипса, гиперболы, пересекающихся прямых), бесконечное число решений (для параллельных прямых) или оказаться несовместной (например, для параболы). Покажем, что в случае существования решения (x_0, y_0) системы, точка центр симметрии кривой.

Определение 3.2.3. Кривая второго порядка называется *центральной*, если она имеет единственный центр. В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, линия называется *нецентральной*. Центральными линиями являются эллипсы, гипербола и пары пересекающихся прямых (см. рис. 3.20), единственный центр этих линий — начало координат (для кривых заданных в каноническом виде). Остальные линии — нецентральные.

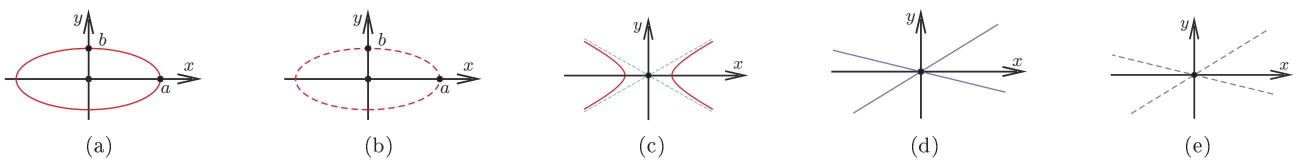


Рис. 3.20: Центральные кривые второго порядка: (a) эллипс; (b) мнимый эллипс; (c) гипербола; (d) пара пересекающихся прямых; (e) пара мнимых пересекающихся прямых.

Теорема 3.2.8. *Предположим, что существует решение уравнения* (3.2.2), *обозначим его через* $C(x_0, y_0)$. *Тогда точка* $C(x_0, y_0)$ *— центр симметрии кривой второго порядка.*

Доказательство. Перенесем начало координат в точку $C(x_0, y_0)$. Выполним преобразование координат

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

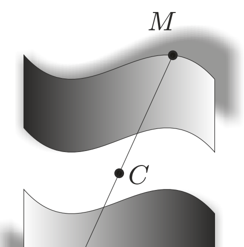
Оно переводит уравнение $F(x, y) = 0$ в уравнение $F'(X, Y)$, где

$$\begin{aligned} F(x,y) = F'(X,Y) &= a_{11}(X+x_0)^2 + 2a_{12}(X+x_0)(Y+y_0) + a_{22}(Y+y_0)^2 + 2a_1(X+x_0) + 2a_2(Y+y_0) + a_0 = \\ &= a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)X + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)Y + a_0' = \\ &= a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a_0', \end{aligned}$$

где $a_0' = F(x_0, y_0)$.

В этом уравнении отсутствуют члены первой степени, откуда следует, что новое начало, т. е. точка $O(0, 0)$ есть центр симметрии кривой. □

Определение 3.2.4. Прямая l_0 называется *осью симметрии* кривой второго порядка, если вместе с каждой своей точкой M кривая содержит также и точку M', симметричную точке M относительно прямой l_0 (прямая l_0 перпендикулярна отрезку MM' и делит его пополам).



Оси симметрии имеют все линии второго порядка. Если линия центральная, то ось симметрии проходит через ее центр. Например, координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипсов, гиперболы, пар пересекающихся прямых (см. рис. 3.20). Если нецентральная линия имеет прямую центров, то эта прямая служит осью симметрии. Например, ось абсцисс канонической системы координат для пар параллельных или совпадающих прямых (см. рис. 3.21 (a)-(c)). Ось ординат Oy также является осью симметрии этих линий. Ось абсцисс Ox является единственной осью симметрии для параболы (см. рис. 3.21 (d)).

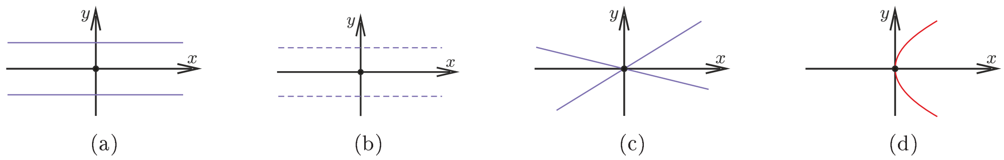


Рис. 3.21: Кривые с линией центров: (a) Пара параллельных прямых; (b) Пара параллельных мнимых прямых; (c) пара пересекающихся прямых. Кривая второго порядка с осью симметрии и не имеющая центра: (d).

Если линия имеет хотя бы один центр, то этот центр можно принять за начало канонической системы координат (рис. 3.21(a), 3.21(c)). Если линия не имеет ни одного центра (является параболой), то началом канонической системы координат является точка пересечения этой параболы с ее осью симметрии (рис. 3.21(d)).

П р и м е р 3.2.3. Приведите кривую второго порядка к каноническому виду

$$x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + (4 - 10\sqrt{3})x + (22 - 20\sqrt{3})y + 31 - 20\sqrt{3} = 0.$$

Напишите преобразование координат в которых кривая второго порядка принимает канонический вид. Найдите уравнение директрис для исходного уравнения.

Доказательство. Выясним, существует ли центр данной кривой и найдём его в случае существования

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 0, \\ F_y(x,y) = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 5\sqrt{3}y + (2 - 5\sqrt{3}) = 0, \\ -5\sqrt{3}x + 11y + (11 - 10\sqrt{3}) = 0, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = -1. \end{cases}$$

Таким образом найден центр симметрии $(x_0, y_0) = (-2, -1)$. Перенесём начало координат в центр рассматриваемой кривой, при помощи замены $x' = x+2$, $y' = y+1$. Поскольку $F(-2,-1) = 16$, то уравнение принимает вид:

$$(x')^2 - 10\sqrt{3}x'y' + 11(y')^2 + 16 = 0.$$

Найдём угол поворота, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат обратился в нуль

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{1 - 11}{-10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом $\alpha = \pi/6$. Сделаем поворот на угол $\pi/6$ (см. рис. 3.22).

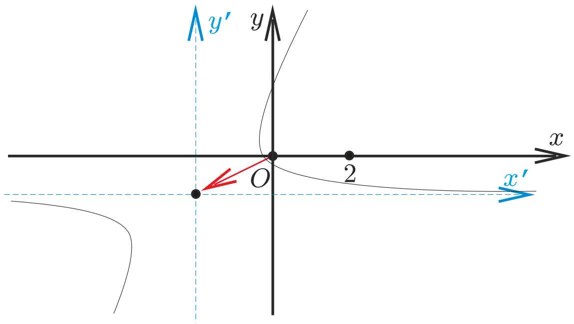


Рис. 3.22:

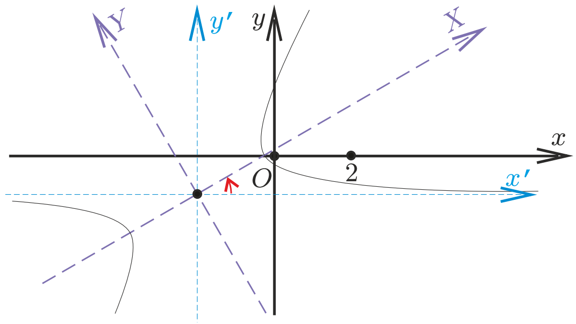


Рис. 3.23:

$$\begin{cases} x' = \cos\alpha \cdot X - \sin\alpha \cdot Y, \\ y' = \sin\alpha \cdot X + \cos\alpha \cdot Y, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X - \frac{1}{2} \cdot Y, \\ y' = \frac{1}{2} \cdot X + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Y. \end{cases}$$

Получаем, что исходное уравнение преобразуется в

$$-4X^2 + 16Y^2 + 16 = 0 \Longleftrightarrow \frac{X^2}{4} - y^2 = 1.$$

Выпишем преобразование, которое приводит исходное уравнение к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная матрица к $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ является $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, то преобразование выражающие переменные X, Y через x, y, запишутся в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y+1 \end{pmatrix}.$$

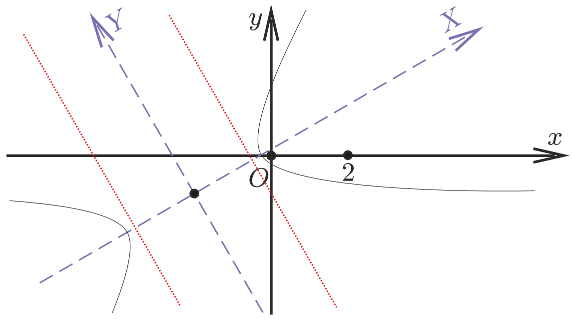


Рис. 3.24:

Для гиперболы $\frac{X^2}{2^2} - Y^2 = 1$ находим, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Уравнение директрис принимает вид $x' = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$ (см. рис. 3.24). Таким образом в исходной системе координат уравнение директрис запишем в параметрическом виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\frac{4}{\sqrt{5}} \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{2}t \\ (-1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}) + \frac{\sqrt{3}t}{2} \end{pmatrix}.$$

Можно перейти от параметрического вида прямой к каноническому. Для этого достаточно сложить первое уравнение, умноженное на $\sqrt{3}$, со вторым.

$$\sqrt{3}x + y = \left(-2\sqrt{3} - 1\right) \pm \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

$\square$

Контрольные вопросы.

1. Всегда ли существует центр у кривой второго порядка?
2. Найдите центр кривой $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y - 9 = 0$, если он существует.
3. Можно ли за счёт поворота координатных осей добиться, чтобы коэффициент при произведении разноименных координат у кривой второго порядка обратился в нуль? Пояснить на примере $29x^2 - 30xy + 101y^2 + 148x - 636y + 924 = 0$.

Упражнения к 3.2

В задачах определите тип кривой второго порядка, приведите её каноническому виду, найдите преобразование координат при переходе в которую данная кривая принимает этот вид, найдите уравнение директрис в исходных координатах (если они существуют для данной кривой). Если кривая распадается на прозведение прямых приведите это разложение.

Упражнение 3.2.1. $3x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 + (18 + 40\sqrt{3})x - (104 + 30\sqrt{3})y + 253 + 120\sqrt{3} = 0.$

Упражнение 3.2.2. $5x^2 - 8xy + 5y^2 + 26x - 28y + 32 = 0.$

Упражнение 3.2.3. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - (4+2\sqrt{3})x + (2-4\sqrt{3})y + 1 - 4\sqrt{3} = 0$.

Упражнение 3.2.4. $11x^2 - 10\sqrt{3}xy + y^2 + 44x + 20\sqrt{3}y + 44 = 0$.

Упражнение 3.2.5. $108x^2 + 312xy + 17y^2 - 312x - 34y - 883 = 0$.

Упражнение 3.2.6. $10x^2 - 8xy + 16y^2 + 20x - 8y - 62 = 0$.

Упражнение 3.2.7. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 24x - 86y + 39 = 0$.

Упражнение 3.2.8. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$.

Упражнение 3.2.9. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 10x + 30y + 25 = 0$.

Упражнение 3.2.10. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 14x - 28y + 54 = 0$.

Ответы: 3.2.1 Гипербола $X^2/9 - Y^2 = 1$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 3$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 4$, $\alpha = \pi/6$ уравнение директрис в переменных X, Y: $X = \pm 9/\sqrt{10}$, в исходных переменных: $\sqrt{3}x + y = 4 - 3\sqrt{3} \pm 18/\sqrt{10}$.

3.2.2 Эллипс $X^2/9 + Y^2 = 1$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 2$, $\alpha = \pi/4$ уравнение директрис в переменных X, Y: $X = \pm 9/(2\sqrt{2})$, в исходных переменных: $\sqrt{3}x + y = 2 - \sqrt{3} \pm 9/\sqrt{2}$.

3.2.3 Парабола $Y^2 = 2X$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \pi/3$, уравнение директрисы в переменных X, Y: $X = -1/2$, в исходных переменных: $x + \sqrt{3}y = -1 - \sqrt{3}$.

3.2.4 Пересекающиеся прямые $X^2 - 4Y^2 = 0$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y$, $\alpha = \pi/3$, директрисс нет, разложение в исходных переменных: $(x(1+2\sqrt{3}) + y(\sqrt{3}-2) - 2 - 4\sqrt{3}) \cdot (x(1-2\sqrt{3}) + y(\sqrt{3}+2) - 2 + 4\sqrt{3}) = 0$.

3.2.5 Гипербола $X^2/4 - Y^2/9 = 1$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$, $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$, уравнение директрис в переменных X, Y: $X = \pm 4/\sqrt{13}$, в исходных переменных: $4x + 3y = 3 \pm 20/\sqrt{13}$.

3.2.6 Эллипс $X^2/9 + Y^2/4 = 1$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, уравнение директрис в переменных X, Y: $X = \pm 9/\sqrt{5}$, в исходных переменных: $2x + y = -2 \pm 9$.

3.2.7 Парабола $Y^2 = 2X$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$, $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$, уравнение директрисы в переменных X, Y: $X = -1/2$, в исходных переменных: $4x + 3y = -7/2$.

3.2.8 Параллельные прямые $X^2 - 4 = 0$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 3$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, директрисс нет, разложение в исходных переменных: $(2x+y+1+2\sqrt{5})\cdot(2x+y+1-2\sqrt{5}) = 0$.

3.2.9 Совпадающие прямые $Y^2 = 0$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/3)$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$, директрисс нет, разложение в исходных переменных: $(x - 3y - 5)^2 = 0$.

3.2.10 Параллельные прямые $Y^2 + 1 = 0$. $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 3$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, директрисс нет, разложение в исходных переменных (в комплексной области): $(x-2y+7)^2 + 5 = 0 \iff (x - 2y + 7 + 5i)(x - 2y + 7 - 5i) = 0$.

3.3 Инварианты многочлена второй степени

Определение 3.3.1. Функция g от коэффициентов многочлена $F(x, y)$ называется *ортогональным инвариантом*, если она не меняется при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой, т. е.

$$g(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0) = g(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_1, a'_2, a'_0).$$

Определение 3.3.2. Следом матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ называется сумма диагональных элементов, т.е. т. е.

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Определение 3.3.3. Матрица $C = (c_{ij})_{i,j=1,2}$ называется *ортогональной*, если она представима в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

В общем виде для матрицы размера $n \times n$ ортогональные матрицы определяются как все матрицы для которых выполнено $C^T C = C \cdot C^T = E$. Откуда можно доказать, что в произвольном случае для ортогональной матрицы выполнено $(\det C)^2 = 1$, а в случае 2×2 она представима в указанном выше виде, т.е. матрицей поворота на угол α в первом случае, когда $\det C = 1$ или композиция поворота на угол α и симметрии относительно вектора $\vec{e}_1$, повернутого на угол α, когда $\det C = -1$, во втором случае.

Теорема 3.3.9. *Функции $I_1 = \operatorname{tr} Q$, $I_2 = \det Q$, $I_3 = \det A$ — ортогональные инварианты.*

Доказательство. Рассмотрим переход от прямоугольной системы координат (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y'):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

где C — произвольная ортогональная матрица. Наряду с матрицей C рассмотрим еще матрицу $D = D_{3\times 3}$

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выполняется соотношение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Пусть при переходе от прямоугольной системы координат (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y') многочлен*

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

переходит в многочлен

$$F'(x', y') = a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_1x + 2a'_2y + a'_0.$$

Тогда матрицы A', Q', отвечающие многочлену $F'(x', y')$, связаны с матрицами A, Q, отвечающие многочлену $F(x, y)$ соотношениями:

$$A' = D^T AD, \quad Q' = C^T QC.$$

Доказательство. Действительно,

$$F'(x', y') = F(x(x', y'), y(x', y')) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T \cdot A \cdot D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(D^T \cdot A \cdot D \right) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проведём рассуждения с квадратичной частью $F_{\text{кв}} = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Поскольку параллельный перенос начала координат не влияет на квадратичную часть, то достаточно рассмотреть случай когда нет x_0, y_0. Например, положив, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тогда

$$F'_{\text{кв}}(x', y') = F_{\text{кв}}(x(x', y'), y(x', y')) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \left(C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right)^T \cdot Q \cdot C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot \left(C^T \cdot Q \cdot C \right) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

□

Используя лемму, получаем:

$$\det Q' = \det(C^T QC) = \det C^T \cdot \det Q \cdot \det C = (\det C)^2 \cdot \det Q = \det Q,$$
$$\det A' = \det(D^T AD) = \det D^T \cdot \det A \cdot \det D = (\det D)^2 \cdot \det A = (\det C)^2 \cdot \det A = \det A.$$

Таким образом доказано, что I_2, I_3 — инварианты. Докажем, что I_1 тоже инвариант. Для этого выпишем явный вид Q', используя равенство $Q' = C^T QC$.

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}a_{11} + c_{21}a_{12} & c_{11}a_{12} + c_{21}a_{22} \\ c_{12}a_{11} + c_{22}a_{12} & c_{12}a_{12} + c_{22}a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11}^2 a_{11} + 2c_{11}c_{21}a_{12} + c_{21}^2 a_{22} & * \\ * & c_{12}^2 a_{11} + 2c_{12}c_{22}a_{12} + c_{22}^2 a_{22} \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\operatorname{tr} Q' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(c_{11}^2 + c_{12}^2) + 2a_{12}(c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22}) + (c_{21}^2 + c_{22}^2)a_{22}$$

Используя явный вид ортогональной матрицы, в обоих случаях получаем:

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}^2 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} &= \cos\alpha \cdot \sin\alpha + (\mp\sin\alpha) \cdot (\pm\cos\alpha) = 0, \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\operatorname{tr} Q' = a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = \operatorname{tr} Q = I_1.$$

□

Определение 3.3.4. Многочлен вида

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E),$$

где E — единичная матрица, назовём *характеристическим многочленом* матрицы A. Корни уравнения $\chi_A(\lambda) = 0$ называются *собственными числами* матрицы A, а множество всех решений $\chi_A(\lambda) = 0$ называется *спектром* матрицы A.

В случае матрицы $B = B_{2\times 2}$ характеристический многочлен равен

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \lambda^2 - \operatorname{tr} B \cdot \lambda + \det B.$$

Пример 3.3.1. Рассмотрим матрицу Q квадратичной части кривой из примера 3.2.1. Напомним, что там мы рассматривали кривую вида $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 + (6\sqrt{3} - 26)x + (6\sqrt{3} - 14)y + 4 - 6\sqrt{3} = 0$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}.$$

Выпишем характеристический многочлен матрицы Q, найдём собственные числа и спектр этой матрицы.

Доказательство.

$$\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = \begin{vmatrix} 13 - \lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda - 4)(\lambda - 16).$$

Таким образом характеристический многочлен матрицы Q равен $\lambda^2 - 20\lambda + 64$, а собственные числа $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 16$. Спектр матрицы Q равен $\sigma_Q = \{4, 16\}$, т.е. состоит из двух чисел 4 и 16. Заметим, что когда кривую второго порядка из примера 3.2.1 мы приводили к каноническому виду, то получили $4x'^2 + 16y'^2 - 16 = 0$, т.е. это равенство можно было бы переписать в виде

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 16 = 0,$$

т.е. коэффициенты при квадратах в каноническом виде есть собственные числа матрицы квадратичной формы кривой. В следующем параграфе мы покажем, что данное совпадение не случайность. □

Замечание 5. Инвариантность I_1 и I_2 можно было бы получить при помощи характеристического многочлена матрицы Q.

Доказательство. Покажем, что характеристический многочлен не меняется при переходе от прямоугольной системы координат (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y'). Действительно,

$$\chi_{Q'}(\lambda) = \det(Q' - \lambda E) = \det(C^T QC - \lambda C^T EC) = \det\left(C^T(Q - \lambda E)C\right) = \\ \det C^T \det(Q - \lambda E) \det C = (\det C)^2 \det(Q - \lambda E) = \chi_Q(\lambda).$$

Поскольку многочлены

$$\chi_{Q'}(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} Q') \cdot \lambda + \det Q',$$
$$\chi_Q(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} Q) \cdot \lambda + \det Q$$

равны и коэффициенты при старших степенях совпадают, то равны их коэффициенты при степенях λ. Откуда и следует инвариантность I_1, I_2. □

3.3.1 Составление канонического уравнения по инвариантам

Из леммы 2 следует, что для многочлена второй степени от переменных x и y вида (3.2.1) на плоскости можно построить прямоугольную декартову систему координат $Ox'y'$ так, что после замены переменных x и y на переменные x' и y' исходный многочлен примет один из следующих трех видов:

	Кривая	A	$I_1 = \operatorname{tr} Q$	$I_2 = \det Q$	$I_3 = \det A$
$\boxed{1}$	$F = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau,\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	$\lambda_1 + \lambda_2$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \tau$
$\boxed{2}$	$F = \lambda_2(y')^2 + 2b_1x',\ \lambda_2 \cdot b_1 \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	λ_2	0	$-\lambda_2 b_1^2$
$\boxed{3}$	$F = \lambda_2(y')^2 + \tau,\ \lambda_2 \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}$	λ_2	0	0

Рассмотрим подробно каждый случай:

$\boxed{1}$ Пусть $F = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \tau$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. Тогда

Коэффициенты λ_1, λ_2 — корни характеристического многочлена матрицы Q, а $\tau = I_3/I_2$.

Действительно, поскольку $I_1 = \operatorname{tr} Q$, $I_2 = \det Q$ — инварианты, то

$$\chi_Q(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\operatorname{tr} Q)\,\lambda + \det Q = \lambda^2 - (\operatorname{tr} Q')\,\lambda + \det Q' = \\ = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Утверждение о равенстве $\tau = I_3/I_2$ вытекает из инвариантности $I_2 = \det Q$, $I_3 = \det A$ и таблицы в начале параграфа.

$\boxed{2}$ Пусть $F = \lambda_2(y')^2 + 2b_1x'$, $\lambda_2 \cdot b_1 \neq 0$. Тогда $\lambda_2 = I_1$, $b_1 = \pm\sqrt{-I_3/I_1}$. Это случай параболы с факальным параметром $p = \sqrt{-I_3/I_1^3}$.

$\boxed{3}$ Пусть $F = \lambda_2(y')^2 + \tau$, $\lambda_2 \neq 0$. Для нахождения τ, найденных нами инвариантов будет не достаточно. Рассмотрим ещё один *полуинвариант* (т.е. почти инвариант) $K = M_{A\,1,3}^{\,1,3} + M_{A\,2,3}^{\,2,3}$, где $M_{A\,i,j}^{\,i,j}$ — минор второго порядка матрицы A, расположенный в строках и столбцах с индексами i и j. В развёрнутом виде *семиинвариант* K запишется в виде:

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Ниже докажем

Теорема 3.3.10. *При условии $I_2 = I_3 = 0$ функция K — инвариант и $K = \lambda_2 \cdot \tau$.*

Откуда опять из инвариантности вытекает, что $\lambda_2 = I_1$, $\tau = K/I_1$.

Таким образом нами доказана теорема:

Теорема 3.3.11. *Необходимые и достаточные условия принадлежности кривой второго порядка к одному из девяти видов в терминах инвариантов $I_1 = \operatorname{tr} Q$, $I_2 = \det Q$, $I_3 = \det A$ и одного полуинварианта K следующие:*

	Название кривой	*Характеризация инвариантами*
1	*Эллипс*	$I_2 > 0 \quad I_1 \cdot I_3 < 0$
2	*Мнимый эллипс*	$I_2 > 0 \quad I_1 \cdot I_3 > 0$
3	*Гипербола*	$I_2 < 0 \quad I_3 \neq 0$
4	*Пара мнимых пересекающихся прямых*	$I_2 > 0 \quad I_3 = 0$
5	*Пара пересекающихся прямых*	$I_2 < 0 \quad I_3 = 0$
6	*Парабола*	$I_2 = 0 \quad I_3 \neq 0$
7	*Пара параллельных прямых*	$I_2 = I_3 = 0 \quad K < 0$
8	*Пара мнимых параллельных прямых*	$I_2 = I_3 = 0 \quad K > 0$
9	*Пара совпадающих прямых*	$I_2 = I_3 = 0 \quad K = 0$

Доказательство. Приведём доказательство теоремы 3.3.10 об инвариантности функции K, при условии $I_2 = I_3 = 0$. Заметим, что справедливо

Характеристический многочлен матрицы A не меняется при заменах прямоугольных координат с общим началом (т.е. при поворотах относительно начала координат и симметрии отностительно какой-либо координатной оси).

Поскольку в этом случае матрица

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обладает свойством $D^T D = E$ (т.е. матрица D — ортогональная матрица 3×3), то

$$\chi_{A'}(\lambda) = \det(A' - \lambda E) = \det(D^T A D - \lambda D^T E D) = \det\Big(D^T (A - \lambda E) D\Big) =$$
$$= \det D^T \det(A - \lambda E) \det D = (\det D)^2 \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda).$$

Выпишем подробнее характеристический многочлен матрицы A:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_0)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \lambda + I_3 =$$
$$= -\lambda^3 + (I_1 + a_0)\lambda^2 - (I_2 + K)\lambda + I_3.$$

Поскольку I_1, I_2, I_3 — инварианты, а характеристический многочлен матрицы A не меняется при заменах прямоугольных координат с общим началом, то K — тоже не меняется при заменах прямоугольных координат с общим началом.

Докажем, что в случае $I_2 = I_3 = 0$ функция K не меняется при переносе начала координат. Поскольку при помощи поворота можно добиться $a_{12} = 0$, то будем считать, что коэффициент $a_{12} = 0$. Из условия $I_2 = a_{11} a_{22} = 0$ можно считать, что $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$. Из условия $I_3 = -a_1^2 a_{22} = 0$ получаем $a_1 = 0$. Тогда $F(x, y) = a_{22} y^2 + 2a_2 y + a_0$. Рассмотрим сдвиг

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$F(x, y) = F'(x', y') = a_{22}(y' + y_0)^2 + 2a_2(y' + y_0) + a_0 = a'_{22}(y')^2 + 2a'_2 y' + a'_0,$$

где $a'_{22} = a_{22}$, $a'_2 = a_{22} y_0 + a_2$, $a'_0 = a_{22} y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0$. Матрицы A и A' имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_2 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_2 \\ 0 & a'_2 & a'_0 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$K' = a'_{22} a'_0 - (a'_2)^2 = a_{22}(a_{22} y_0^2 + 2a_2 y_0 + a_0) - (a_{22} y_0 + a_2)^2 = a_{22} a_0 - a_2^2 = K.$$

Теперь для случая $F(x, y) = \lambda_2 y^2 + \tau$ получаем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad K = \lambda_2 \tau \Longrightarrow \tau = K/I_1.$$

Теорема 3.3.10 доказана. □

Приведём, полученные нами данные в виде таблицы:

<table>
<tr><th colspan="5">Центральные кривые</th></tr>
<tr><td rowspan="3">эллиптический тип</td><td rowspan="3">$I_2 > 0 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$</td><td rowspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>$I_1 \cdot I_3 < 0$</td><td>Эллипс</td></tr>
<tr><td>$I_1 \cdot I_3 > 0$</td><td>Эллипс мнимый</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>Пара мнимых пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><td rowspan="2">гиперболи-ческий тип</td><td rowspan="2">$I_2 < 0 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>Гипербола</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_3 = 0$</td><td>Пара пересекающихся прямых</td></tr>
<tr><th colspan="5">Нецентральные кривые</th></tr>
<tr><td rowspan="4">параболический тип</td><td rowspan="4">$I_2 = 0 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$</td><td colspan="2">$I_3 \neq 0$</td><td>Парабола</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$I_3 = 0$</td><td>$K < 0$</td><td>Пара параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$K > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных прямых</td></tr>
<tr><td>$K = 0$</td><td>Пара совпадающих прямых</td></tr>
</table>

П р и м е р 3.3.2. Приведите кривую второго порядка к каноническому виду

$$x^2 + 4xy + 5y^2 - 14x - 18y + 4 = 0.$$

а. Найдите инварианты данной кривой.

б. Найдите канонический вид кривой.

с. Найдите площадь множества, ограниченного данной кривой.

Доказательство. Для определения типа кривой найдём инварианты:

$$I_1 = 1 + 5 = 6; \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 5 & -9 \\ -7 & -9 & 4 \end{vmatrix} = -70.$$

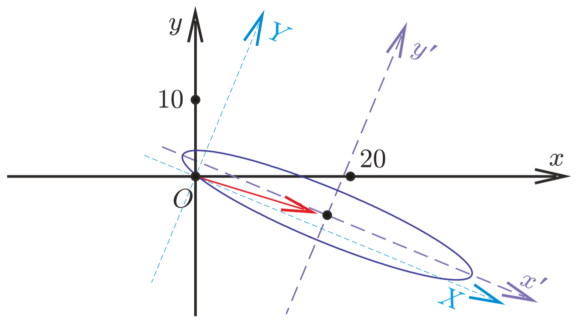


Рис. 3.25:

Поскольку $I_2 > 0$, $I_1 \cdot I_3 < 0$, то это эллипс. Найдём собственные числа квадратичной формы

$$\det(I_2 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 1 = (\lambda - 3)^2 - 8 = 0.$$

Откуда собственные числа квадратичной формы исходной кривой второго порядка будут $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Следовательно канонический вид принимает следующий вид:

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \iff (3 - 2\sqrt{2})(x')^2 + (3 + 2\sqrt{2})(y')^2 = 70 \iff$$
$$\iff \frac{(x')^2}{3 + 2\sqrt{2}} + (3 + 2\sqrt{2})(y')^2 = 70 \iff$$
$$\iff \frac{(x')^2}{(3 + 2\sqrt{2})^2} + (y')^2 = \frac{70}{3 + 2\sqrt{2}} \iff \left(\frac{x'}{(3 + 2\sqrt{2})\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{c}}\right)^2 = 1,$$

где $c = \frac{70}{3+2\sqrt{2}}$. Поскольку площадь эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ равна πab, то искомая площадь равна:

$$S = (3 + 2\sqrt{2}) \cdot c \cdot \pi = 70\pi.$$

$\square$

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение инварианта кривой второго порядка? Какие инварианты Вам известны?
2. Будет ли $I_1 = \operatorname{tr} Q$, где Q матрица квадратичной формы кривой второго порядка сохранять инвариантность относительно растяжения координатных осей?
3. Дайте определение ортогональной матрицы для случая 2×2, 3×3.
4. Чему равны I_1, I_2, I_3, K для кривой записанной в каноническом виде для а) эллипса, б) гиперболы, с) параболы?

Упражнения к 3.3

В следующих задачах, при помощи инвариантов, определите тип кривой второго порядка, приведите её каноническому виду, найдите преобразование координат при переходе в которую данная кривая принимает этот вид, Если кривая распадается на прозведение прямых приведите это разложение.

Упражнение 3.3.1. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 2(8 + \sqrt{3})x + 2y + 21 = 0.$

Упражнение 3.3.2. $6x^2 - 4xy + 9y^2 + 12x - 4y - 4 = 0.$

Упражнение 3.3.3. $3x^2 + 12xy - 13y^2 + 12x - 26y - 28 = 0.$

Упражнение 3.3.4. $x^2 - 2xy + y^2 - 6\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 12\sqrt{2} = 0.$

Упражнение 3.3.5. $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 4x - 38y - 23 = 0.$

Упражнение 3.3.6. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 6 = 0.$

Упражнение 3.3.7. $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 12x - 12y + 9 = 0.$

Упражнение 3.3.8. $x^2 - 6xy - 7y^2 - 14x - 22y - 7 = 0.$

Упражнение 3.3.9. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4(1 + \sqrt{5})x + 2(1 - 4\sqrt{5})y + 1 - 8\sqrt{5} = 0.$

Упражнение 3.3.10. $9x^2 - 6xy + y^2 + 30x - 10y + 35 = 0.$

Упражнение 3.3.11. $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 9x - 13y + 7 = 0.$

Упражнение 3.3.12. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 = 0.$

Упражнение 3.3.13. $x^2 - 8xy + 16y^2 + 14x - 56y + 49 = 0.$

Упражнение 3.3.14. $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 30x + 20y + 77 = 0.$

Упражнение 3.3.15. $x^2 + 6\sqrt{3}xy - 5y^2 + (6\sqrt{3} - 2)x - (6\sqrt{3} + 10)y - 6\sqrt{3} - 20 = 0.$

Упражнение 3.3.16. $11x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9y^2 + 44x - 4\sqrt{3}y - 4 = 0.$

Упражнение 3.3.17. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 36x - 4\sqrt{3}y + 96 = 0.$

Упражнение 3.3.18. $x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 3 = 0.$

Упражнение 3.3.19. $x^2 - xy + y^2 - 7x - y + 16 = 0.$

Упражнение 3.3.20. $x^2 - 2xy + y^2 - 10(2 + \sqrt{2})x + 10(2 - \sqrt{2})y + 100 = 0.$

Ответы: 3.3.1 $I_1 = 4$, $I_2 = 0$, $I_3 = -64$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, парабола $Y^2 = 2X$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = 60^\circ$, $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$, $\sin\alpha = 1/2$.

3.3.2 $I_1 = 15$, $I_2 = 50$, $I_3 = -500$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$, эллипс $X^2/2+Y^2 = 1$, $x = \cos\alpha\, X-\sin\alpha\, Y-1$, $y = \sin\alpha\, X+\cos\alpha\, Y$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$.

3.3.3 $I_1 = -10$, $I_2 = -75$, $I_3 = 1125$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -15$, гипербола $X^2/3 - Y^2 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/3)$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$.

3.3.4 $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -72$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, парабола $Y^2 = 6X$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = 45^\circ$, $\cos\alpha = \sin\alpha = 1/\sqrt{2}$.

3.3.5 $I_1 = -5$, $I_2 = -50$, $I_3 = 0$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -10$, пересекающиеся прямые $X^2 - 2Y^2 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/2)$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{5}$, $((2 - \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y - 3 - 4\sqrt{2})((2 + \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y - 3 + 4\sqrt{2}) = 0$.

3.3.6 $I_1 = 5$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = -75$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, параллельные прямые $Y^2 - 3 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$, $(2x - y + 1 - \sqrt{3})(2x - y + 1 + \sqrt{3}) = 0$.

3.3.7 $I_1 = 8$, $I_2 = 15$, $I_3 = -225$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, эллипс $X^2/5 + Y^2/3 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 2$, $\alpha = 45^\circ$, $\cos\alpha = \sin\alpha = 1/\sqrt{2}$.

3.3.8 $I_1 = -6$, $I_2 = -16$, $I_3 = -128$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -8$, гипербола $X^2 - Y^2/4 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\sin\alpha = 3/\sqrt{10}$.

3.3.9 $I_1 = 5$, $I_2 = 0$, $I_3 = -500$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, парабола $Y^2 = 4X$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$.

3.3.10 $I_1 = 10$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = 100$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$, пара мнимых параллельных прямых $Y^2 + 1 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg} 3$, $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\sin\alpha = 3/\sqrt{10}$, $(3x - y + 5)^2 + 10 = 0$.

3.3.11 $I_1 = 0$, $I_2 = -25/4$, $I_3 = 0$, $\lambda_1 = 5/2$, $\lambda_2 = -5/2$, пересекающиеся прямые $X^2-Y^2 = 0$, $x = \cos\alpha\, X-\sin\alpha\, Y+3$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/3)$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{10}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{10}$, $(2x - y - 7)(x + 2y - 1) = 0$.

3.3.12 $I_1 = 13$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 13$, пара совпадающих прямых $Y^2 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(2/3)$, $\cos\alpha = 3/\sqrt{13}$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{13}$, $(2x - 3y + 1)^2 = 0$.

3.3.13 $I_1 = 17$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 17$, пара совпадающих прямых $Y^2 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 2$, $\alpha = \operatorname{arctg}(1/4)$, $\cos\alpha = 4/\sqrt{17}$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{17}$, $(x - 4y + 7)^2 = 0$.

3.3.14 $I_1 = 13$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, $K = 676$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 13$, пара мнимых параллельных прямых $Y^2 + 4 = 0$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = \operatorname{arctg}(3/2)$, $\cos\alpha = 2/\sqrt{13}$, $\sin\alpha = 3/\sqrt{13}$, $(3x - 2y + 5)^2 + 52 = 0$.

3.3.15 $I_1 = -4$, $I_2 = -32$, $I_3 = 512$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -8$, гипербола $X^2/4 - Y^2/2 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 1$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y - 1$, $\alpha = 30^\circ$.

3.3.16 $I_1 = 20$, $I_2 = 96$, $I_3 = -4608$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 12$, эллипс $X^2/6 + Y^2/4 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y - 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y$, $\alpha = 60^\circ$.

3.3.17 $I_1 = 4$, $I_2 = 0$, $I_3 = -576$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, парабола $Y^2 = 6X$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 4$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y$, $\alpha = 60^\circ$.

3.3.18 $I_1 = 2$, $I_2 = -3$, $I_3 = -18$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, гипербола $X^2/6 - Y^2/2 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 2$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 1$, $\alpha = 45^\circ$.

3.3.19 $I_1 = 2$, $I_2 = 3/4$, $I_3 = -9/4$, $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 3/2$, эллипс $X^2/6 + Y^2/2 = 1$, $x = \cos\alpha\, X - \sin\alpha\, Y + 5$, $y = \sin\alpha\, X + \cos\alpha\, Y + 3$, $\alpha = 45^\circ$.

3.3.20 $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -200$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, парабола $Y^2 = 10X$, $x = \cos\alpha\, X-\sin\alpha\, Y+5$, $y = \sin\alpha\, X+\cos\alpha\, Y-5$, $\alpha = 45^\circ$.

Глава 4

Поверхности второго порядка

4.1 Канонический вид некоторых поверхностей второго порядка

Определение 4.1.1. Поверхность второго порядка — геометрическое место точек пространства $\mathbb{R}^3$, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \tag{4.1.1}$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{23}, a_{13} отличен от нуля.

4.1.1 Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.1.2}$$

где a, b, c — положительные числа. Уравнение (4.1.3) называется каноническим уравнением эллипсоида гиперболоида. Эллипсоид обладает тремя плоскостями симметрии, тремя осями симметрии и центром симметрии. Ими служат соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

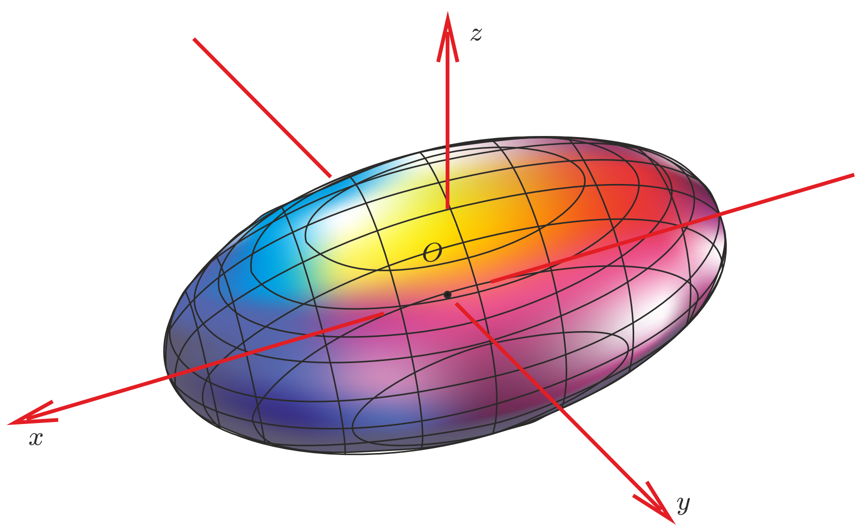


Рис. 4.1: Эллипсоид

Величины a, b, c называют полуосями эллипсоида. Также эллипсоидом называют тело, ограниченное поверхностью эллипсоида. В случае, когда пара полуосей имеет одинаковую длину, эллипсоид может быть получен вращением эллипса вокруг одной из его осей. Такой эллипсоид называют *эллипсоидом вращения* или *сфероидом.*

4.1.2 Гиперболоиды

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{4.1.3}$$

где a, b, c — положительные числа. Уравнение (4.1.3) называется каноническим уравнением однополостного гиперболоида.

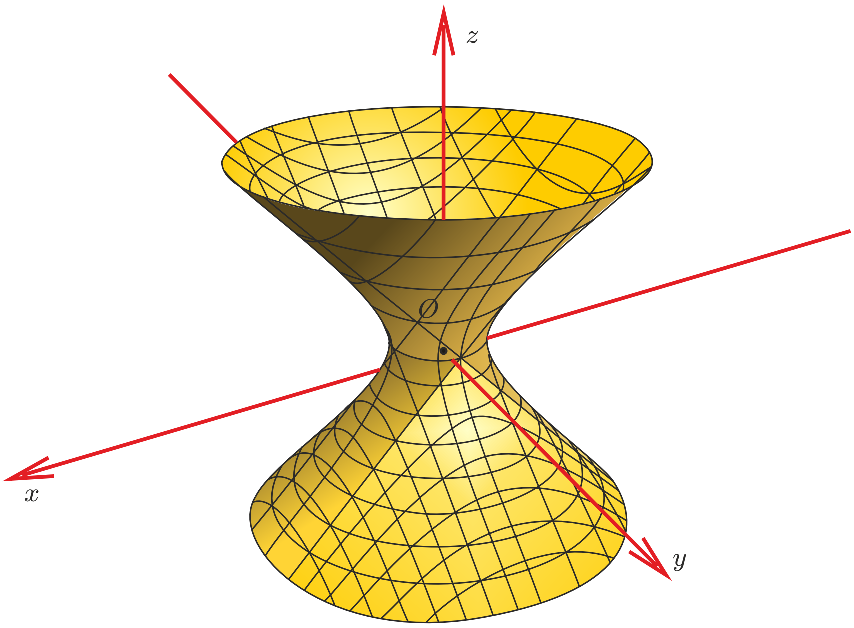


Рис. 4.2: Однополостный гиперболоид

Каноническое уравнение двухполостного гиперболоида

Двухполостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{4.1.4}$$

где a, b, c — положительные числа. Уравнение (4.1.4) называется каноническим уравнением двухполостного гиперболоида. Из уравнений гиперболоидов вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат — центром симметрии гиперболоидов.

Если гиперболоиды заданы своими каноническими уравнениями то оси Ox, Oy и Oz называются их главными осями.

Если $a = b$, то такая поверхность называется гиперболоидом вращения. Однополостный гиперболоид вращения может быть получен вращением гиперболы вокруг её мнимой оси, двухполостный — вокруг действительной. Двуполостный гиперболоид вращения также является геометрическим местом точек P, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек A и B постоянен: $|AP - BP| = Const$. В этом случае A и B называются фокусами гиперболоида.

Отметим важные свойства однополостного гиперболоида

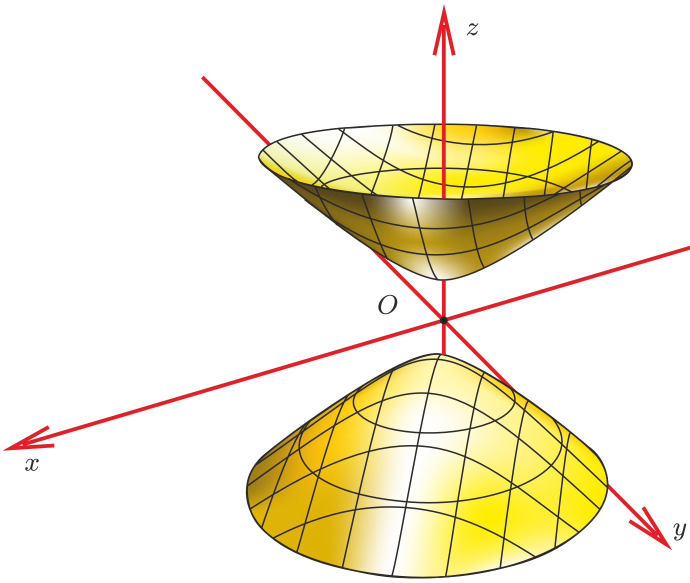


Рис. 4.3: Двухполостный гиперболоид

Лемма 4. • *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две, и только две, его прямолинейные образующие.*

- *Две образующие из разных семейств всегда лежат в одной плоскости.*
- *Две образующие из одного семейства скрещиваются (т.е. не пересекаются и не параллельны).*

Доказательство. Докажем только первое утверждение. Оставив остальные без доказательства. Запишем уравнение однополостного гиперболоида в следующем виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим прямые L и L^*, заданные как линии пересечения плоскостей:

$$L: \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), & ; \\ \beta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right), & \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \end{cases}$$

$$L^*: \quad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \delta\left(1 + \frac{y}{b}\right), & ; \\ \delta\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \gamma\left(1 - \frac{y}{b}\right), & \gamma^2 + \delta^2 \neq 0. \end{cases}$$

Прямые L и L^* целиком лежат на поверхности. Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно почленно перемножить уравнения плоскостей (см. вид формулы для однополостного гиперболоида в начале доказательства). При этом через каждую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности проходит единственная прямая из семейства L и единственная прямая из семейства L^*. Эти прямые (то есть пары чисел α, β и γ, δ) находятся из однородных систем линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha(x_0/a - z_0/c) = \beta(1 - y_0/b); \\ \beta(x_0/a + z_0/c) = \alpha(1 + y_0/b). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma(x_0/a - z_0/c) = \delta(1 + y_0/b); \\ \delta(x_0/a + z_0/c) = \gamma(1 - y_0/b). \end{cases}$$

матрицы которых вырождены (то есть системы имеют нетривиальные решения) и имеют ранг, равный 1 (то есть все решения каждой из систем пропорциональны и определяют единственную прямую). Остается добавить, что прямые не совпадают (достаточно проверить неколлинеарность их направляющих векторов).
□

4.1.3 Конус

каноническое уравнение конуса

Конусом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{4.1.5}$$

где a, b, c — положительные числа. Уравнение (4.1.5) называется каноническим уравнением конуса. Так же, как эллипсоид и гиперболоиды, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

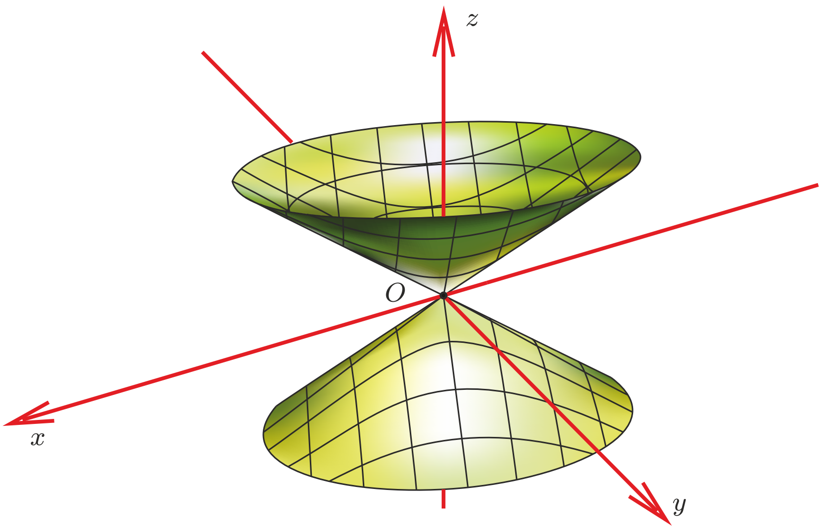


Рис. 4.4: Конус

каноническое уравнение мнимого конуса

Мнимым конусом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{4.1.6}$$

где a, b, c — положительные числа. Уравнение (4.1.5) называется каноническим уравнением мнимого конуса.

4.1.4 Параболоиды

каноническое уравнение эллиптического параболоида

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \tag{4.1.7}$$

где p, q — положительные числа. Уравнение (4.1.7) называется каноническим уравнением эллиптического параболоида. Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии и ось симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости xOz, yOz и координатная ось Oz.

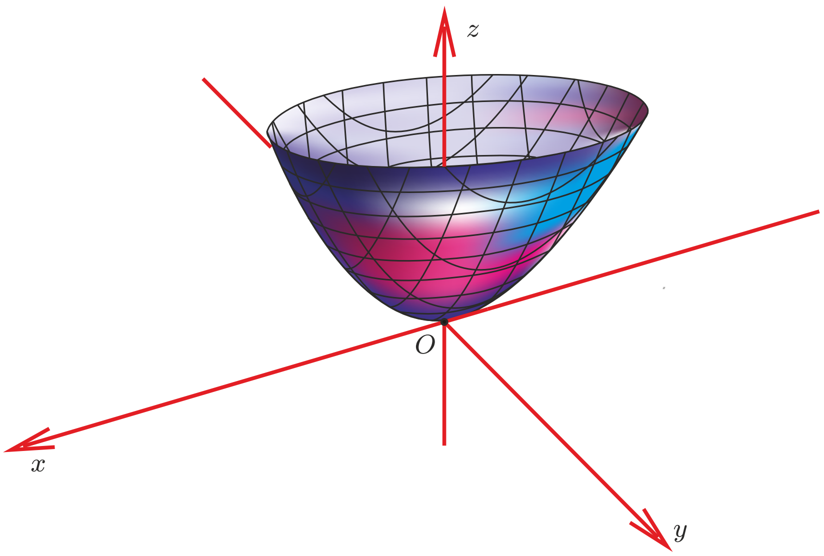


Рис. 4.5: Эллиптический параболоид

каноническое уравнение гиперболического параболоида

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \tag{4.1.8}$$

где p, q — положительные числа. Уравнение (4.1.8) называется каноническим уравнением гиперболического параболоида. Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии и ось симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости xOz, yOz и координатная ось Oz.

Сформулируем без доказательства следующую лемму:

Лемма 5.
- *Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две и только две его прямолинейные образующие.*
- *Две образующие из разных семейств пересекаются.*
- *Две образующие из одного семейства скрещиваются, т. е. не пересекаются и не параллельны.*

Доказательство данной леммы можно найти в ([2], с. 89).

4.1.5 Цилиндрические и конические поверхности. Восстановление поверхностей по направляющим

Определение 4.1.2. *Цилиндрической поверхностью* называется поверхность, образованная прямыми, называемыми *образующими*, — параллельными некоторой данной прямой и пересекают, ими данную линию L — *направляющую.*

Пусть направляющая линия цилиндрической поверхности задаётся пересечением поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Пусть $\vec{l} = (m, n, p)$ — направляющие коэффициенты образующих цилиндрической поверхности. Канонические уравнения образующих будут:

$$\frac{X - x}{m} = \frac{Y - y}{n} = \frac{Z - z}{p}$$

где (x, y, z) — точка, принадлежащая направляющей, а X, Y, Z — текущие координаты. Исключая x, y и z из полученных четырех уравнений, находим искомое уравнение цилиндрической поверхности.

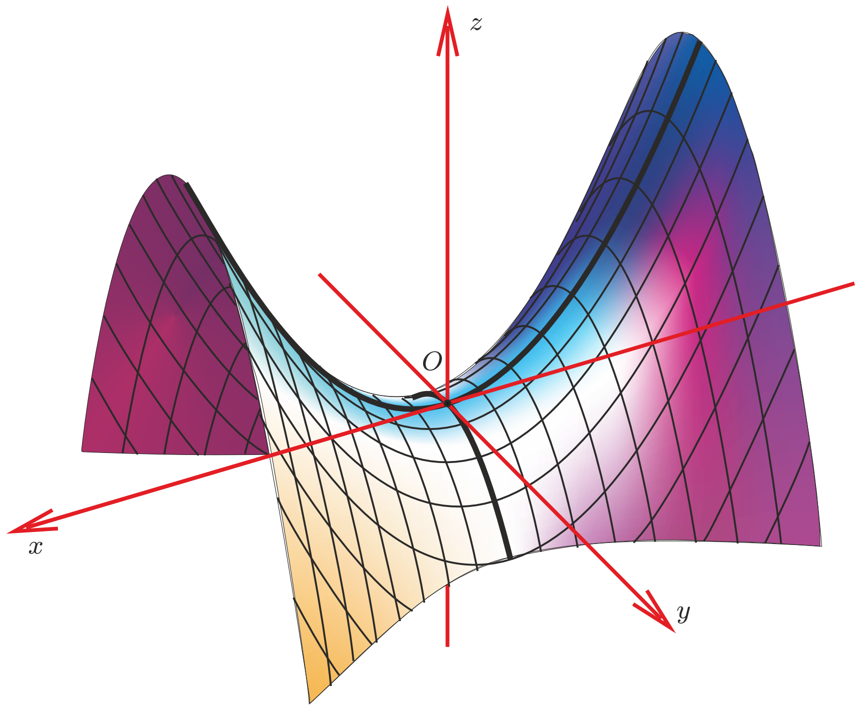


Рис. 4.6: Гиперболический параболоид

П р и м е р 4.1.1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой
$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1},$$
а направляющей служит кривая, заданная пересечением поверхности и плоскости:
$$2xz + z^2 + 1 = 0, \quad x + y + z = 0$$
Каноническое уравнение образующих будут:
$$\frac{X - x}{0} = \frac{Y - y}{0} = \frac{Z - z}{1}.$$
Обозначив в последнии равенства за t, получаем: $x = X$, $y = Y$, $z = Z - t$ и, учитывая $x + y + z = 0$, получаем $t = X + Y + Z$. Откуда
$$x = X, \quad y = Y, \quad z = -X - Y.$$
Исключим x, y и z из последних уравнений. Для этого подставим найденые значения x, y, z в уравнение $2xz + z^2 + 1 = 0$:
$$2X(-X - Y) + (X + Y)^2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow X^2 - Y^2 = 1.$$
Это, очевидно, есть уравнение гиперболического цилиндра (см. рис. 4.7).

П р и м е р 4.1.2. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1},$$
а направляющей служит кривая, заданная пересечением поверхности и плоскости:
$$x^2 + yx - z^2 - yz + 2x - 2z = 0, \quad x + z - 1 = 0$$
Каноническое уравнение образующих будут:
$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{2} = \frac{Z - z}{1}.$$

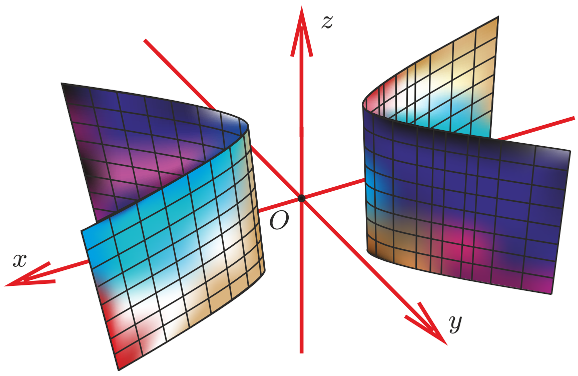


Рис. 4.7:

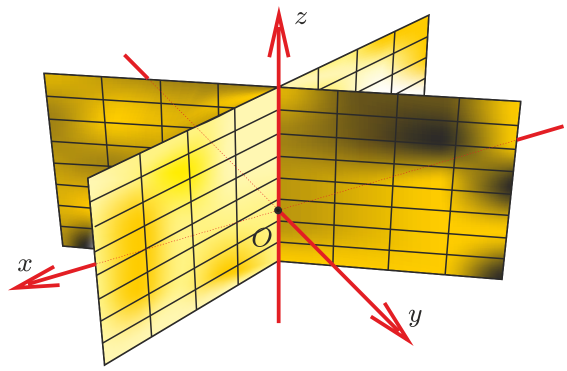


Рис. 4.8:

Обозначив в последнии равенства за t, получаем: $x = X - t$, $y = Y - 2t$, $z = Z - t$ и, учитывая $x + z - 1 = 0$, получаем $X + Z = 1 + 2t$ или $t = (X + Z - 1)/2$. Откуда

$$x = \frac{X - Z + 1}{2}, \quad y = Y - X - Z + 1, \quad z = \frac{Z - X + 1}{2}.$$

Исключим x, y и z из последних уравнений. Для этого подставим найденые значения x, y, z в уравнение $x^2 + yx - z^2 - yz + 2x - 2z = 0$:

$$-X^2 + XY - YZ + Z^2 + 4X - 4Z = 0 \Longleftrightarrow (Z - X)(X - Y + Z - 4) = 0.$$

Это, очевидно, есть пересекающиеся плоскости. Вид данной поверхности в каноническом виде изображён на рис. 4.8.

Определение 4.1.3. *Конической поверхностью* называется поверхность, образованная прямыми, называемыми *образующими* конуса, и проходящими через данную точку — вершину конуса и пересекающими данную линию - *направляющую* конуса.

Пусть направляющая конической поверхности имеет уравнения

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0.$$

Вершина конуса имеет координаты (x_0, y_0, z_0). Канонические уравнения образующих конуса как прямых, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) и через точку (x, y, z) направляющей, будут;

$$\frac{X - x_0}{x - x_0} = \frac{Y - y_0}{y - y_0} = \frac{Z - z_0}{z - z_0}.$$

Исключая x, y и z из полученных четырех уравнений, находим искомое уравнение конической поверхности. Отметим, что уравнение является однородным относительно разностей $X - x_0$, $Y - y_0$, $Z - z_0$, т.е. все его члены одного измерения относительно разностей $X - x_0$, $Y - y_0$, $Z - z_0$.

П р и м е р 4.1.3. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей, заданной пересечением поверхности и плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c.$$

Каноническое уравнение образующих, проходящих через точку $(0, 0, 0)$ и точку (x, y, z) направляющей будут:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Обозначив в последнии равенства за t, получаем: $x = tX$, $y = tY$, $z = tZ$ и, учитывая $z = c$, получаем $t = c/Z$. Откуда

$$x = \frac{cX}{Z}, \quad y = \frac{cY}{Z}.$$

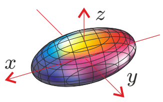
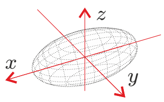
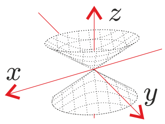
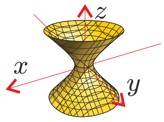
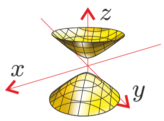
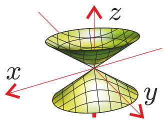
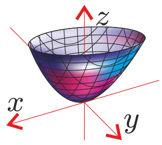
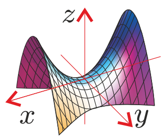
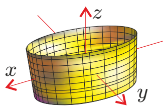
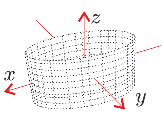
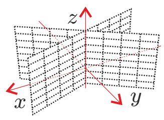
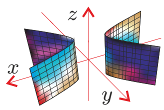
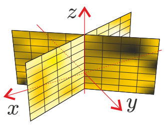
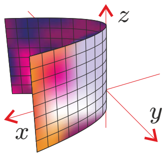
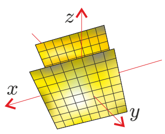
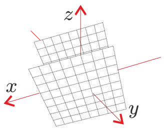
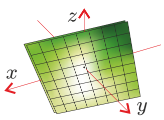
Исключим x, y и z из последних уравнений. Для этого подставим найденые значения x, y в первое уравнение направляющей $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$\frac{c^2X^2}{a^2Z^2}+\frac{c^2Y^2}{b^2Z^2}=1 \Longleftrightarrow \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0.$$

Получаем конус в каноническом виде (см. рис. 4.4).

4.2 Классификация поверхностей второго порядка

Теорема 4.2.12. *Для произвольной поверхности S второго прорядка, заданной общим уравнением* (4.1.1), *существует такая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ что в этой системе поверхность S задана уравнением одного из следующих канонических видов, перечисленных в таблице ниже. Систему координат $Oxyz$ называют канонической.*

Поверхности второго порядка		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $\boxed{1.}$ Эллипсоид 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ $\boxed{2.}$ Мнимый эллипсоид 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ $\boxed{3.}$ Мнимый конус 
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ $\boxed{4.}$ Однополостный гиперболоид 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ $\boxed{5.}$ Двухполостный гиперболоид 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ $\boxed{6.}$ Конус 
$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ $\boxed{7.}$ Эллиптический параболоид 	$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ $\boxed{8.}$ Гиперболический параболоид 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\boxed{9.}$ Эллиптический цилиндр 
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ $\boxed{10.}$ Мнимый Эллиптический цилиндр 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ $\boxed{11.}$ Пара мнимых пересекающихся плоскостей 	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\boxed{12.}$ Гиперболический цилиндр 
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ $\boxed{13.}$ Пара пересекающихся плоскостей 	$y^2=2px$ $\boxed{14.}$ Параболический цилиндр 	$y^2-b^2=0$ $\boxed{15.}$ Пара параллельных плоскостей 
$y^2+b^2=0$ $\boxed{16.}$ Пара мнимых параллельных плоскостей 	$y^2=0$ $\boxed{17.}$ Пара совпадающих плоскостей 	Везде $a,b,c,p,q>0$ Для 1,2 $a\geqslant b\geqslant c$ Для 3-6,9,10 $a\geqslant b$ Для 7 $p\geqslant q$

4.3 Основные свойства поверхностей второго порядка

Центральные поверхности

Если центр поверхности второго порядка существует и единственен, то его координаты $(x_0,\ y_0\ z_0)$ можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Матричный вид уравнения поверхности второго порядка

Уравнение поверхности второго порядка может быть переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Также можно выделить квадратичную и линейную части друг от друга:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0.$$

Если обозначить

$$B = \begin{pmatrix} A & L \\ L^T & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T,$$

то уравнение приобретает следующий вид:

$$X^T A X + 2LX + a_0 = 0,$$

либо в коротком виде:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

4.3.1 Инварианты и классификация поверхностей второго порядка

Значения следующих величин сохраняются при ортогональных преобразованиях базиса:

Связанных с матрицей A:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr} A, \\ I_2 &= M_{A}{}^{1,2}_{1,2} + M_{A}{}^{1,3}_{1,3} + M_{A}{}^{2,3}_{2,3}, \\ I_3 &= \det A, \end{aligned}$$

где $M_{A}{}^{i,j}_{i,j}$ — минор второго порядка матрицы A, расположенный в строках и столбцах с индексами i и j, т.е. в развёрнутом виде:

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

<table>
<tr><th colspan="6">Центральные поверхности $(I_3 \neq 0)$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">эллиптический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$I_2 > 0,\ I_1 \cdot I_3 > 0 \Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одного знака</td><td colspan="2">$I_4 < 0$</td><td>Эллипсоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_4 > 0$</td><td>Мнимый Эллипсоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_4 = 0$</td><td>Мнимый конус</td></tr>
<tr><td rowspan="3">гиперболический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$I_2 \leqslant 0,\ I_1 \cdot I_3 \leqslant 0 \Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков</td><td colspan="2">$I_4 > 0$</td><td>Однополостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_4 < 0$</td><td>Двухполостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_4 = 0$</td><td>Конус</td></tr>
<tr><th colspan="6">Нецентральные поверхности $(I_3 = 0)$</th></tr>
<tr><td rowspan="11">параболический тип</td><td colspan="4">$I_4 < 0$</td><td>Эллиптический параболоид</td></tr>
<tr><td colspan="4">$I_4 > 0$</td><td>Гиперболический параболоид</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$I_4 = 0$</td><td rowspan="3">$I_2 > 0$</td><td colspan="2">$I_1 \cdot K_3 < 0$</td><td>Эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$I_1 \cdot K_3 > 0$</td><td>Мнимый эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$K_3 = 0$</td><td>пара мнимых пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$I_2 < 0$</td><td colspan="2">$K_3 \neq 0$</td><td>Гиперболический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$K_3 = 0$</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$I_2 = 0$</td><td colspan="2">$K_3 \neq 0$</td><td>Параболический цилиндр</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$K_3 = 0$</td><td>$K_2 < 0$</td><td>Пара параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$K_2 > 0$</td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$K_2 = 0$</td><td>Пара совпадающих плоскостей</td></tr>
</table>

Связанных с блочной матрицей

$$B = \begin{pmatrix} A & L \\ L^T & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= M_B{}^{1,4}_{1,4} + M_B{}^{2,4}_{2,4} + M_B{}^{3,4}_{3,4}, \\ K_3 &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} M_B{}^{i,j,k}_{i,j,k}, \\ I_4 &= \det B. \end{aligned}$$

В развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} K_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}, \\ K_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{31} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}, \\ I_4 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

При любой ортогональной замене переменных (параллельном переносе системы координат, повороты систем координат относительно одной из осей, симметрия относительно одной из координатной осей) величины I_1, I_2, I_3, I_4 остаются неизменными (ортогональные инварианты). При этом:

- K_3 остается неизменной только если $I_2 = I_3 = I_4 = 0$;
- K_2 остается неизменной только если $I_2 = I_3 = I_4 = K_3 = 0$.

Приведём без доказательства следующую лемму:

Лемма 6. *Для многочлена второй степени от переменных x, y и z (для поверхности второго порядка) на плоскости можно построить прямоугольную декартову систему координат $Ox'y'$ так, что после замены переменных x и y на переменные x' и y' исходный многочлен примет один из следующих пяти видов:*

1. $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + \frac{I_4}{I_3} = 0, \quad I_3 \neq 0;$

2. $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 \pm 2\sqrt{-\frac{I_4}{I_2}}z = 0, \quad I_4 \neq 0,\ I_2 \neq 0,\ I_3 = 0;$

3. $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0, \quad I_2 \neq 0,\ I_3 = I_4 = 0;$

4. $I_1(x')^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}y' = 0, \quad I_2 \neq 0,\ I_2 = I_3 = I_4 = 0,\ K_3 \neq 0;$

5. $I_1(x')^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0, \quad I_2 = I_3 = I_4 = K_3 = 0.$

Глава 5

Вопросы к зачёту

1. Перестановки. Инверсия. Определитель $n \times n$. Случаи 2×2, 3×3. Свойства определетелей 3×3.

2. Разложение определителя по строке, столбцу.

3. Обратная матрица. Правила Крамера.

4. Векторное произведение и его свойства. Покоординатная запись.

5. Смешанное произведение. Объём параллелепипеда, треугольной пирамиды. Компланарность векторов.

6. Деление отрезка в заданном отношении. Уравнение прямой $\mathbb{R}^2$. Канонический, нормальный вид прямой. Параметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках.

7. Расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой (случай $\mathbb{R}^2$). Расстояние между параллельными прямыми.

8. Полярная система координат. Связь с декартовыми координатами. Преобразование декартовых координат на плоскости: сдвиг, поворот.

9. Плоскость. Канонический, нормальный вид. Уравнение плоскости по 3 точкам, не лежащим на одной прямой. Уравнение плоскости в отрезках.

10. Расстояние от точки до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями.

11. Уравнение прямой $\mathbb{R}^3$. Параметрическое задание, канонический вид. Уравнение прямой по двум точкам. Взаимное расположение прямых, расстояние между прямыми.

12. Эллипс. Канонический вид. Эксцентриситет, директрисы. Касательная к эллипсу.

13. Гипербола. Канонический вид. Эксцентриситет, директрисы, асимптоты. Касательная к гиперболе.

14. Парабола. Канонический вид. Эксцентриситет, директрисы. Касательная к параболе. Оптическое свойство параболы.

15. Приведение кривой 2 порядка к каноническому виду при помощи ортогональных преобразований (поворот, параллельный перенос).

16. Центр кривой второго порядка. Центральные и нецентральные кривые.

17. Ортогональные инварианты кривой второго порядка. Характеристическое уравнение квадратичной формы кривой.

18. Составление канонического уравнения по инвариантам.

19. Поверхности второго порядка. Эллипсоид, гиперболоиды, конус.

20. Параболоиды, цилиндрические поверхности. Классификация поверхностей 2-го порядка.

Литература

[1] *В. И. Арнольд.* Динамика, статистика и проективная геометрия полей Галуа // МЦНМО, 2005.

[2] *В. Н. Делоне, Д. А. Райков.* Аналитическая геометрия // Москва, "Государственное издательство технико-теоритической литературы т. 2, 1949.

[3] *Н. В. Ефимов.* Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие. — 13-е изд., стереот. // Москва: Физматлит, 2005. — 240 с.

Предметный указатель