УДК 51-76,77

# УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ РОСТА ПОПУЛЯЦИИ ЧЕЛОВЕКА

**А.В. Луковенков, В.В. Белокуров, С.Д. Варфоломеев**

*(Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля РАН (ИБХФ РАН),кафедра химической энзимологии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; e-mail: luks@list.ru)*

**На основе кинетических подходов, а также на базе принципов теории устойчивости построена модель динамики популяции человека, обладающая устойчивым стационарным решением. В результате анализа построенной модели удалось оценить модельные коэффициенты и предельную численность населения Земли, а также характерный срок достижения этой численности.**

**Ключевые слова:** *устойчивость, популяционная динамика, модели роста популяций, пределы роста популяции человека.*

Динамика различных по своей природе химических и биологических явлений часто имеет под собой общую кинетическую основу, определяемую природой кинетического механизма, детерминирующего временные закономерности процесса. Если рассмотреть динамику разветвленных цепных или автокаталитических реакций, процесс роста клеточных популяций или раковых клеток, закономерности развития популяции человека, то можно обнаружить общие черты. Процессы имеют значительный период индукции, часто переходят в фазу экспоненциального или гиперэкспоненциального взрыва, однако могут протекать и в устойчивом линейном или стационарном режимах. Вопросам кинетического описания разветвленных цепных и автокаталитических реакций, автокаталитического роста клеточных популяций значительное внимание уделяли классики химической кинетики Н.Н. Семенов и Н.М. Эмануэль [1, 2]. Кинетические основы клеточного роста изложены в [3, 4]. Весьма близким по кинетическому поведению представляется процесс роста популяции человека [5–7]. Очевидно, что кинетическое поведение всех этих систем определяется формой дифференциального уравнения, описывающего динамику каждого процесса, и ограничениями, связанными с параметрами (константами) процесса. Вместе с тем в кинетическом поведении всех обсуждаемых систем лежат общие базовые закономерности, определяющие устойчивый или неустойчивый тип поведения.

Вопросам устойчивости химических и биохимических систем посвящены работы [8, 9]. Представляется в высшей степени интересным применение элементов теории устойчивости и к исследованию поведения популяции человека.

Т. Мальтус в своей классической работе [5] впервые обратил внимание на возможность математически описать динамику роста популяции человека. Он предположил, что рост численности народонаселения Земли происходит в геометрической прогрессии или (в непрерывном представлении) в виде экспоненты. Это означает, что скорость роста населения в каждый момент пропорциональна его наличной численности:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN,\ a > 0. \tag{1}$$

Добавляя к этому уравнению начальное условие $N(0) = N_0$, можно получить означенную выше экспоненту:

$$N(t) = N_0 e^{at}. \tag{2}$$

Решение характеризуется положительным значением показателя экспоненты и является неустойчивым [10–13]. К середине XX в. выяснилось, что неустойчивость – не единственный недостаток решения. Более тщательный анализ, проведенный Х. фон Ферстером и его коллегами на основе данных о численности населения планеты за период с начала нашей эры до 1960 г., привел к выводу, что в реальности рост происходит существенно быстрее, нежели по экспоненциальному закону Мальтуса. В работе [6] было показано, что в последние 2000 лет скорость роста была пропорциональна квадрату наличной численности населения:

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN^2,\ a > 0. \tag{3}$$

Постановка для уравнения (3) задачи Коши с тем же начальным условием $N(0) = N_0$ приводит к решению гиперболического типа:

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - aN_0 t}. \quad (4)$$

Расчет коэффициентов дает следующее уравнение:

$$N(t) = 2 \cdot 10^{11} (2025 - t), \quad (5)$$

из которого очевидно, что функция $N(t)$ терпит разрыв в момент $t_{cr}$ = 2025 г., т.е. в сравнительно близкое время. К аналогичному выводу приходят и авторы более новых исследований [7, 14].

Чтобы устранить возникающий парадокс (развитие популяции до бесконечной численности за конечное время) в [14] предлагается подход, основанный на использовании управляющей функции. Предполагается, что численность популяции человека имеет линейную зависимость от имеющейся численности людей, однако параметр скорости роста ($a$) в такой зависимости не постоянен, а сам зависит от времени через уравнение

$$a(t) = kJ(t), \quad (6)$$

где под $J(t)$ понимается количество накопленной человечеством информации. Полагая, что скорость производства информации зависит от наличного количества информации линейно, т.е. что

$$\frac{dJ(t)}{dt} = mJ(t),\ m > 0$$

и что $J(0) = J_0$, легко получить управляющую функцию в виде экспоненты: $J(t) = J_0 e^{mt}$. Тогда, согласно предположению и уравнению (6), будем иметь:

$$N(t) = N_0 \exp(\frac{k}{m} \exp(mt)). \quad (7)$$

Статистические данные [14] хорошо согласуются с формулой (7). Однако ее недостаток по-прежнему связан с тем, что полученное решение неустойчиво, хотя предложенная функция и позволяет избежать противоречий, связанных с разрывом и уходом численности популяции в бесконечность.

Из этих рассуждений следует важный факт: среди всех моделей роста человеческой популяции нужно особо выделять те, что удовлетворяют следующим условиям:

1) связывают численность популяции людей только с самой этой численностью;

2) описываются дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N), \quad (8)$$

где функция $f(N)$ аналитическая в окрестности всех положительных $N$;

3) уравнение имеет устойчивое стационарное решение, т.е. решение, не зависящее от времени;

4) в последние 2000 лет решение уравнения близко к гиперболе (5).

Из этих четырех весьма общих условий можно вывести уравнение, достаточно хорошо описывающее численность популяции человека. Для этого имеет смысл воспользоваться алгоритмом [8], позволяющим определять устойчивость стационарных решений. Из него напрямую следует, что стационарное решение уравнения

$$N(t) = N_0 = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда $p > q$. В самом деле,

$$\begin{aligned} f'(N_0) &= aq\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{q}{p-q}} - bp\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}} = \\ &= b\left(q\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\frac{q}{p-q}} - p\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right) = \\ &= b\left(q\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}} - p\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}}\right) = \\ &= b\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{p-q}} (q-p) < 0 \Leftrightarrow p > q. \end{aligned} \quad (9)$$

Предположим, что аналитическая функция $f(N)$ разложена в ряд Тейлора в окрестности нуля. Тогда наиболее простым случаем, когда $f(N) = 0$, станет тот, где $f(N)$ состоит из двух членов разного знака, т.е. имеет вид (9). У всех уравнений вида (9) есть точка перегиба

$$N_{flex} = \sqrt[q-p]{\frac{bp}{aq}}. \quad (10)$$

Из приведенных рассуждений можно заключить, что хорошим и притом достаточно простым приближением к функции, удовлетворяющей четырем вышеприведенным условиям, будет функция вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN^2 - bN^3. \qquad (11)$$

Если предположить, что $a$ гораздо больше $b$, то можно заметить, что при небольших численностях популяции это уравнение практически эквивалентно (3), что делает его соответствующим четвертому из приведенных выше условий. Условия 2 и 3 для уравнения выполнены, равно как и условие 1. То, что у члена с отрицательным знаком третья степень, вызвано тем фактом, что при большой разнице между $p$ и $q$ в уравнении точка перегиба и окружающий ее почти линейный участок будут весьма недалеко отстоять от стационарного решения уравнения (11). В настоящее время очевидно, что точка перегиба на графике роста популяции уже пройдена, поскольку скорость роста населения в развитых странах (суммарное население которых составляет более миллиарда человек) перешла через максимум довольно давно (50–70-е годы XX в.). В мире в целом, а равно и в странах с населением свыше миллиарда человек (Китае и Индии), скорость роста населения преодолела максимум в период с 1980 по 2005 г. (рис. 1). Поэтому имеет смысл считать, что начало XXI в. стало точкой перегиба графика численности населения Земли. В то же время в настоящий момент скорого выхода численности популяции на стационар не наблюдается. Отсюда следует, что член со знаком минус должен иметь степень, близкую к 2, т.е. равную 3.

Стационарное решение уравнения (11), как нетрудно видеть, равно $N_{st} = a/b$. К этому решению стягиваются все решения, стартующие с начального условия $N(0) = N_0 < a/b$, потому они также асимптотически устойчивы. Точка перегиба, соответствующая нынешней численности в 6–7 млрд человек, вычисляется из формулы $2a/3b$, т.е. сейчас человечество достигло примерно двух третей от предельной своей численности. Это значит, что предельная численность равна примерно 9,0–10,5 млрд человек. Более точный расчет, основанный на статистическом анализе примерно линейного участка роста с 50-х гг. XX в., дает значение предельной численности 9,5 млрд человек. Расчетная модельная кривая вместе с реальными данными и численности популяции, а также средним вариантом прогноза ООН на 2000–2050 гг. приведена на рис. 1.

Выявленная в настоящей работе динамика роста численности популяции человека прослеживается за большой период времени (около 270–300 лет, см. рис. 2). При этом уравнение достаточно хорошо описывает наблюдаемый динамический феномен. Это позволяет надеяться, что экстраполяция на относительно небольшой период времени (50–70 лет) должна приводить к достаточно обоснованному результату.

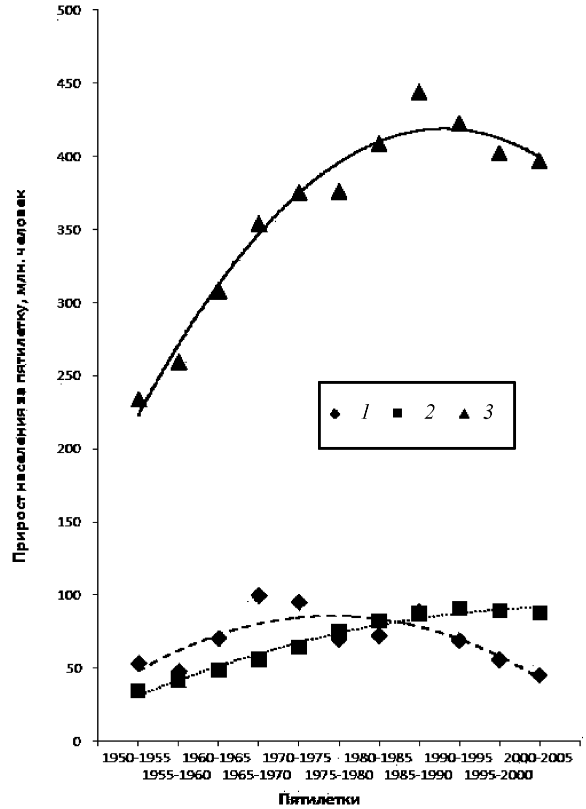


Рис. 1. Изменение скорости роста населения мира, а также Китая и Индии с 1955 по 2005 гг. [15]: *1* – Китай, 2 – Индия, 3 – мир

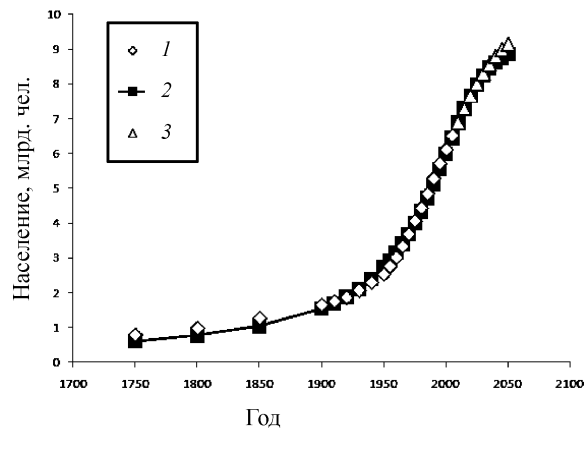


Рис. 2. Модельная и реальная [15, 16] кривые роста населения Земли. Точки с 2010 по 2050 г. – средний вариант прогноза ООН за 2008 г. [15]: *1* – население Земли, *2* – население по модели, *3* – средний вариант прогноза ООН

Полученное стационарное состояние асимптотически устойчиво и соответствующая ему численность населения Земли будет в основном достигнута приблизительно к 2100 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Семенов Н.Н.* Избранные труды. М., 2004.
2. *Эмануэль Н. М., Евсеенко Л. С.* Количественные основы клинической онкологии. М., 1970.
3. *Варфоломеев С. Д., Калюжный С. В.* Биотехнология: Кинетические основы микробиологических процессов. М., 1990.
4. *Варфоломеев С.Д., Гуревич К.Г.* Биокинетика. М., 1999.
5. *Th. Malthus.* An Essay about the Principle of Population. L., 1798.
6. *fon Foerster H., Mora P. M., Amiot L. W.* // Science. 1960. N 132. P. 1291.
7. *Капица С.П.* Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле. М., 1999.
8. *Варфоломеев С.Д., Луковенков А.В.* Устойчивость в химических и биологических системах // Институт проблем химической физики РАН. Ежегодник. 2008. Т. V. С. 65.
9. *Варфоломеев С. Д., Луковенков А. В.* // ЖФХ. 2010. **84.** № 8. С. 1448.
10. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М., 2000.
11. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969.
12. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М., 1967.
13. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перстюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. М., 1989.
14. *Varfolomeev S. D., Gurevich K. G.* // J. Theoretical Biology. 2001. N 212. P. 367.
15. *World Population Prospects: The 2008 Revision Population Database.* Population Division, Department of Economic and Social Affairs, 11 March 2009 (http://esa.un.org/UNPP/p2k0data.asp).
16. *The World at Six Billion.* Population Division, Department of Economic and Social Affairs, United Nations Secretariat, 12 October 1999 (http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbilpart1.pdf).


Поступила в редакцию 02.06.2010

## STABILITY AND HUMAN POPULATION GROWTH LIMITS

**A.V. Lukovenkov, V.V. Belokurov, S.D. Varfolomeev**

*(Emanuel Institute of Biochemical Physics of RAS, Moscow, Russia Moscow State University, Moscow, Russia)*

**In the article on the basis of kinetical approach and general principles of Lyapunov's stability theory was built a model of human population dynamics which has a stable stationary solution. An analysis of the model suggested gives the values of model coefficients and allows to estimate limits of human population growth and characteristic time needed to reach the limits.**

**Key words:** *stability, population dynamics, population growth models, limits of human population growth.*

**Сведения об авторах:** *Луковенков Александр Васильевич* – мл. науч. сотр. ИБХФ РАН, асп. III года (luks@list.ru); *Белокуров Владимир Викторович* – и.о. проректора МГУ, профессор кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета МГУ, доктор физ.-матем. наук, профессор; *Варфоломеев Сергей Дмитриевич* – директор ИБХФ РАН, зав. кафедрой химической энзимологии химического факультета МГУ, чл.-корр. РАН, доктор хим. наук, профессор.