УДК 333.6.6.011

УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В СТАЦИОНАРНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕ СМЕСИ ОДНОАТОМНЫХ ГАЗОВ

А.В. Лазарев, Н.Н. Застенкер, Д.Н. Трубников

(кафедра физической химии; e-mail: tdn@phys.chem.msu.ru)

На основе кинетического уравнения Больцмана в приближении эллипсоидальной функции распределения получена система уравнений, учитывающая двухмерный характер течения вблизи сопла, для параметров сверхзвуковой стационарной струи, истекающей в вакуум.

Ключевые слова: *стационарная сверхзвуковая струя, уравнение Больцмана, метод моментов Грэда, поступательная релаксация.*

Исследования со стационарными сверхзвуковыми струями смесей газов всегда имели как прикладное, так и фундаментальное значение. К практическому применению стационарных струй следует отнести разгонку молекулярных пучков [1], разделение различающихся по массам компонентов газообразной смеси (например, изотопов [2, 3] и аэрозолей [4, 5]) и напыление пленок органических полупроводниковых материалов [6–8]. К основным направлениям фундаментальных исследований можно отнести изучение релаксации поступательной [9–11] и внутренней [12–14] энергии в смесях газов, химической релаксации [15], конденсации и кластерообразования [16, 17]. В физической основе всех этих явлений лежат специфические для расширения струй смесей газов неравновесные процессы (обмен импульсом и энергией между частицами разного сорта), приводящие к "скольжению" скоростей и разности температур компонентов смеси.

Строгое теоретическое описание этих явлений возможно на основе кинетического подхода (например, на основе системы уравнений Больцмана для смеси). Однако в настоящее время нет методов точного решения этой задачи. Решение обычными методами (разложение по малым параметрам, моментные методы и т.д.) затруднено из-за появления большого числа варьируемых параметров задачи (масса компонентов, состав смеси, сечение взаимодействия частиц компонентов между собой и друг с другом). Кроме того, появляется множество методов решения, связанных с разложением по этим параметрам в предельных случаях: гиперзвуковое приближение [9, 18–21], компоненты с сильно различающимися массами [22, 23], линейное [24, 25] и нелинейное [5] приближение по величине "скольжения" скоростей. При этом в большинстве работ используются либо нереалистические модели взаимодействия частиц (максвелловские молекулы [22, 26], твердые сферы [23, 25]), либо модельные аналоги уравнения Больцмана [18, 21].

Применение моментных методов решения уравнения Больцмана дает возможность построения модели струи для реалистического потенциала взаимодействия. В случае стационарных сверхзвуковых струй в разных приближениях моментного метода Грэда изучалась поступательная релаксация в струях одноатомных газов [27] и их смесей [28]. В работах [29, 30] в 13-моментном приближении метода Грэда построена модель истечения сверхзвуковых импульсных струй одноатомных газов и их смесей. На основе эллипсоидальной модели функции распределения изучалась поступательная релаксация в стационарных струях одноатомных газов [31–33], их смесей [11] и двухатомных газов [34–36].

Цель настоящей работы – вывод уравнений поступательной релаксации в стационарной сверхзвуковой струе смеси газов в случае реалистического потенциала взаимодействия частиц с учетом двухмерности течения вблизи сопла.

Система моментных уравнений

Адекватное описание расширения многокомпонентной стационарной сверхзвуковой струи в вакуум возможно на основе системы кинетических уравнений Больцмана для смеси [37]:

$$\vec{\xi}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r} = \sum_{\beta} I_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

где f_α – функция распределения по скоростям частиц компонента α, $\vec{\xi}$ – скорость. Интеграл столкновений частиц α и β друг с другом имеет вид:

$$I_{\alpha\beta}(\vec{\xi}) = \int [f_\alpha(\vec{\xi}')f_\beta(\vec{\xi}_1') - $$
$$-f_\alpha(\vec{\xi})f_\beta(\vec{\xi}_1)]g\sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)\sin\chi d\chi d\varepsilon\, d\vec{\xi}_1.$$

Здесь $\vec{\xi}$, $\vec{\xi}_1$ и $\vec{\xi}'$, $\vec{\xi}_1'$ – скорости частиц α и β до и после столкновения соответственно; $\sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)$ – дифференциальное сечение рассеяния пары частиц α и β, $g = |\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}|$, χ и ε – углы рассеяния в системе центра масс.

При рассмотрении осесимметричного течения удобно ввести сферическую систему координат в физическом пространстве и декартову – в пространстве скоростей: ξ_r – вдоль радиус-вектора частицы, ξ_θ – в плоскости, проходящей через ξ_r и ось потока, а ξ_φ – перпендикулярно к ним (рисунок).

Система уравнений Больцмана в этом случае имеет вид [38]:

$$\{\xi_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\xi_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\xi_\theta^2+\xi_\varphi^2}{r}\frac{\partial}{\partial\xi_r} - \frac{\xi_\varphi\xi_\theta\text{ctg}\theta + \xi_r\xi_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\xi_\varphi} + $$
$$+\frac{\xi_\varphi^2\text{ctg}\theta - \xi_r\xi_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\xi_\theta}\}f_\alpha = \sum_\beta I_{\alpha\beta}. \qquad (2)$$

Макропараметры компонента α струи можно определить через моменты функции распределения следующим образом:

числовая плотность

$$n_\alpha = \int f_\alpha d\vec{\xi},$$

продольная средняя скорость

$$u_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}\int \xi_r f_\alpha d\vec{\xi},$$

поперечная средняя скорость

$$\text{v}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha}\int \xi_\theta f_\alpha d\vec{\xi},$$

диагональные элементы тензора напряжений

$$(p_{\alpha rr}, p_{\alpha\theta\theta}, p_{\alpha\varphi\varphi}) = \int[(\xi_r - u_\alpha)^2, (\xi_\theta - \text{v}_\alpha)^2, \xi_\varphi^2]f_\alpha d\vec{\xi},$$

недиагональные элементы тензора напряжений

$$p_{\alpha r\theta} = \int(\xi_r - u_\alpha)(\xi_\theta - \text{v}_\alpha)f_\alpha d\vec{\xi}.$$

Умножая уравнение (2) на 1, ξ_r, $\text{v}^2 = \xi_r^2 + \xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2$, $\rho^2 = \xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2$ и интегрируя по всему пространству скоростей, получаем уравнения сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n_\alpha u_\alpha) + r\frac{\partial}{\partial\theta}(n_\alpha \text{v}_\alpha) + rn_\alpha \text{v}_\alpha\,\text{ctg}\theta = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}[r^2(p_{\alpha rr} + n_\alpha u_\alpha^2)] + r\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\theta\right)(n_\alpha u_\alpha \text{v}_\alpha + p_{\alpha r\theta}) - $$
$$- r(n_\alpha \text{v}_\alpha^2 + p_{\alpha\theta\theta} + p_{\alpha\varphi\varphi}) = r^2 I_\alpha^\xi, \qquad (4)$$

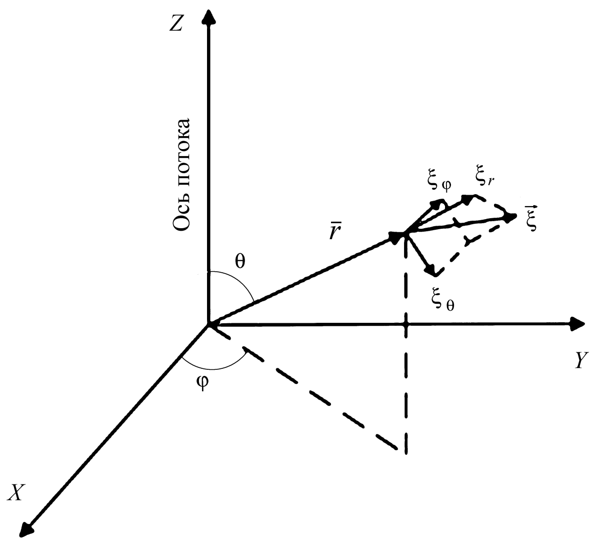
$$\frac{\partial}{\partial r}\{r^2[n_\alpha u_\alpha^3 + 3u_\alpha p_{\alpha rr} + u_\alpha(p_{\alpha\theta\theta} + p_{\alpha\varphi\varphi}) + $$
$$+2\text{v}_\alpha p_{\alpha r\theta} + n_\alpha \text{v}_\alpha u_\alpha^2]\} + $$
$$+r\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\theta\right)[\text{v}_\alpha(p_{\alpha rr} + p_{\alpha\varphi\varphi} + 3p_{\alpha\theta\theta}) + $$
$$+n_\alpha \text{v}_\alpha^3 + n_\alpha \text{v}_\alpha u_\alpha^2 + 2u_\alpha p_{\alpha\theta r}] = r^2 I_\alpha^{\text{v}^2}, \qquad (5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + 2r\right)\{r^2[u_\alpha(p_{\alpha\theta\theta} + p_{\alpha\varphi\varphi}) + 2\text{v}_\alpha p_{\alpha r\theta} + n_\alpha u_\alpha \text{v}_\alpha^2]\} + $$
$$+r\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \text{ctg}\theta\right)[\text{v}_\alpha(p_{\alpha\varphi\varphi} + 3p_{\alpha\theta\theta}) + n_\alpha \text{v}_\alpha^3] = r^2 I_\alpha^{\rho^2}. \qquad (6)$$

Здесь

$$I_\alpha^\varphi = \sum_\beta I_{\alpha\beta}^\varphi, \quad I_{\alpha\beta}^\varphi = \int \varphi(\vec{\xi})I_{\alpha\beta}(\vec{\xi})d\vec{\xi}.$$

В системе уравнений (3)–(6) опущены члены, связанные с моментами третьего порядка (имеющими смысл потока энергии) и выше. Это обстоятельство связано с тем, что далее рассматривается случай



Системы координат в физическом пространстве $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ и пространстве скоростей $\vec{\xi} = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi)$

больших давлений в источнике струи (малые числа Кнудсена источника). При этом в верхней части струи (вблизи сопла) это является следствием незначительной роли теплопереноса, а в нижней части струи в переходном режиме это соответствует гиперзвуковому приближению [18].

Рассмотрим свойства струи на оси течения. В силу симметрии потока на его оси выполняются следующие равенства:

$$\mathrm{v}_\alpha = 0, \quad p_{\alpha r\theta} = 0, \quad p_{\alpha\varphi\varphi} = p_{\alpha\theta\theta}.$$

Используя их и исключая из уравнений (4)–(6) с помощью уравнения неразрывности (3) величину $(\partial/\partial\theta + \mathrm{ctg}\theta)(n_\alpha \mathrm{v}_\alpha)$, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(r^2 p_{\alpha rr}) + n_\alpha u_\alpha r^2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \\ &+ r\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\theta\right) p_{\alpha r\theta} - 2r p_{\alpha\theta\theta} = r^2 I_\alpha^\xi,\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}&n_\alpha u_\alpha r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{3p_{\alpha rr} + 2p_{\alpha\theta\theta}}{n_\alpha} + u_\alpha^2\right) + \\ &+ 2\frac{p_{\alpha rr} - p_{\alpha\theta\theta}}{n_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}(n_\alpha u_\alpha r^2) + \\ &+ 2u_\alpha r\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{ctg}\theta\right) p_{\alpha r\theta} = r^2 I_\alpha^{\mathrm{v}^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&n_\alpha u_\alpha r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_{\alpha\theta\theta}}{n_\alpha}\right) - \frac{p_{\alpha\theta\theta}}{n_\alpha}\frac{\partial}{\partial r}(n_\alpha u_\alpha r^2) + \\ &+ 2r u_\alpha p_{\alpha\theta\theta} = \frac{1}{2} r^2 I_\alpha^{\rho^2}.\end{aligned}$$

Учитывая малость поперечных градиентов скорости и давления вблизи оси, приравняем нулю, следуя [39], величину $(\partial/\partial\theta + \mathrm{ctg}\theta)p_{\alpha r\theta}$.

Определим кинетические температуры компонентов на оси струи следующим образом:

$$T_{\alpha\|} = p_{\alpha rr}/n_\alpha R_\alpha, \quad T_{\alpha\perp} = p_{\alpha\theta\theta}/n_\alpha R_\alpha,$$

где $R_\alpha = k/m_\alpha$ – газовая постоянная, k – постоянная Больцмана, m_α – масса частицы сорта α. В новых обозначениях система моментных уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(u_\alpha^2 + 2R_\alpha T_{\alpha\|}) + 2R_\alpha T_{\alpha\|}\frac{\partial}{\partial r}[\ln(u_\alpha r^2)] - \\ &-\frac{4R_\alpha T_{\alpha\perp}}{r} = \frac{2I_\alpha^\xi}{n_\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}(u_\alpha^2 + 3R_\alpha T_{\alpha\|} + 2R_\alpha T_{\alpha\perp}) + \\ &+2R_\alpha(T_{\alpha\|} - T_{\alpha\perp})\frac{\partial}{\partial r}[\ln(n_\alpha u_\alpha r^2)] = \frac{I_\alpha^{\mathrm{v}^2}}{n_\alpha u_\alpha},\end{aligned} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(R_\alpha T_{\alpha\perp}) - R_\alpha T_{\alpha\perp}\frac{\partial}{\partial r}[\ln(n_\alpha u_\alpha r^2)] + \frac{2R_\alpha T_{\alpha\perp}}{r} = \frac{1}{2}\frac{I_\alpha^{\rho^2}}{n_\alpha u_\alpha}.$$

Это незамкнутая система трех дифференциальных уравнений, связывающая четыре макроскопических параметра n_α, u_α, $T_{\alpha\|}$ и $T_{\alpha\perp}$ на оси течения. При выводе этой системы не было сделано никаких упрощений, позволяющих перейти от двухмерной задачи к одномерной, за исключением предположений, касающихся значимости параметров вблизи оси струи. Следствием этого является недоопределенность системы уравнений (8). Если предположить, что давление в источнике достаточно велико, то поток будет практически равновесным вплоть до области ($r \ge r_0$), где он с достаточной точностью аппроксимируется сферически–симметричным течением. В этом случае система (8) замыкается условием:

$$\frac{\partial}{\partial r}(n_\alpha u_\alpha r^2) = 0,$$

поток в двухмерной области ($r < r_0$) описывается уравнениями изэнтропического течения, решение которых дает граничные условия для системы уравнений (8). Все параметры струи (плотность, средняя скорость и температура) в двухмерной области в этом случае выражаются через локальное число Маха, зависимость которого от расстояния определяется либо какой-нибудь эмпирической зависимостью, либо решением уравнений равновесной газодинамики [40, 41].

Моменты от интегралов столкновений

Для вычисления моментов от интеграла столкновений требуется задание конкретного вида функции распределения. Ранее было показано, что при моделировании свойств как однокомпонентных струй [31, 32], так и струй смесей [11] хорошей аппроксимацией является эллипсоидальная функция распределения. Мы используем тот же подход и будем полагать, что

$$\begin{aligned}&f_\alpha(\vec{\xi}) = n_\alpha(2\pi R_\alpha T_{\alpha\|})^{-1/2}(2\pi R_\alpha T_{\alpha\perp})^{-1} \times \\ &\times \exp\left[-\frac{(\xi - u_\alpha)^2}{2R_\alpha T_{\alpha\|}} - \frac{\rho^2}{2R_\alpha T_{\alpha\perp}}\right].\end{aligned}$$

Тогда, переходя в моментах от интеграла столкновений в систему центра масс и выполняя интегрирование по скорости центра масс, получаем следующее выражение:

$$I_{\alpha\beta}^{\xi} = 2\mu_\beta n_\alpha n_\beta \pi^{-1/2} \frac{\beta_{\alpha\beta}}{\alpha_{\alpha\beta}^2} \int_0^\infty x^4 Q_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}}\right)dx \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} tE(x,t;s_{\alpha\beta},\gamma_{\alpha\beta})dt, \qquad (9)$$

$$I_{\alpha\beta}^{v^2} = 4\mu_\beta n_\alpha n_\beta \pi^{-1/2} \frac{\beta_{\alpha\beta}}{\alpha_{\alpha\beta}^{3/2}} \int_0^\infty x^4 Q_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}}\right)dx \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} E(x,t;s_{\alpha\beta},\gamma_{\alpha\beta})dt \times$$

$$\times [xt^2\left(\frac{\mu_\beta}{\alpha_\beta} - \frac{\mu_\alpha}{\alpha_\alpha}\right) + \gamma_{\alpha\beta}x(1-t^2)\times$$

$$\times\left(\frac{\mu_\beta}{\beta_\beta} - \frac{\mu_\alpha}{\beta_\alpha}\right) + t\left(\frac{v_\alpha}{\alpha_\beta} + \frac{v_\beta}{\alpha_\alpha}\right)],$$

$$I_{\alpha\alpha}^{\rho^2} = n_\alpha^2 (2\pi)^{-1/2} \frac{\beta_\alpha}{\alpha_\alpha^{5/2}} \int_0^\infty x^5 Q_{\alpha\alpha}^{(2)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_\alpha/2}}\right)dx \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} (3t^2-1)E(x,t;s=0,\gamma_\alpha)dt,$$

$$I_{\alpha\beta}^{\rho^2} = n_\alpha n_\beta \pi^{-1/2} \frac{\beta_{\alpha\beta}}{\alpha_{\alpha\beta}^{5/2}} \int_0^\infty x^5 dx \int_{-1}^{1} E(x,t;s_{\alpha\beta},\gamma_{\alpha\beta})dt \times$$

$$\times [\mu_\beta^2 Q_{\alpha\beta}^{(2)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}}\right)(3t^2-1) + 4\mu_\beta\beta_\alpha\left(\frac{\mu_\beta}{\beta_\beta} - \frac{\mu_\alpha}{\beta_\alpha}\right)\times$$

$$\times Q_{\alpha\beta}^{(1)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}}\right)(1-t^2)],$$

где

$\alpha_\alpha = m_\alpha/2kT_{\alpha\|}$, $\beta_\alpha = m_\alpha/2kT_{\alpha\perp}$,

$\alpha_{\alpha\beta}^{-1} = \alpha_\alpha^{-1} + \alpha_\beta^{-1}$, $\beta_{\alpha\beta}^{-1} = \beta_\alpha^{-1} + \beta_\beta^{-1}$,

$v_\alpha = u_\alpha\sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}$, $s_{\alpha\beta} = v_\beta - v_\alpha$,

$\gamma_\alpha = \beta_\alpha/\alpha_\alpha$, $\gamma_{\alpha\beta} = \beta_{\alpha\beta}/\alpha_{\alpha\beta}$,

$E(x, t; s, \gamma) = \exp[-(xt - s)^2 - \gamma x^2(1 - t^2)]$,

$x = \sqrt{\alpha_{\alpha\beta}}\,|\vec{g}|$ – безразмерная скорость относительного движения частиц, а t – косинус угла между $\vec{g}$ и осью потока.

В подынтегральных выражениях (9) появились эффективные сечения l-го порядка (l = 1, 2):

$$Q_{\alpha\beta}^{(l)}(g) = 2\pi\int_0^\pi \sigma_{\alpha\beta}(g,\chi)(1-\cos^l\chi)\sin\chi d\chi.$$

В этом приближении столкновительные члены зависят от безразмерных параметров s и γ, которые характеризуют степень неравновесности системы.

Параметр s связан со сдвигом функций распределения компонентов друг относительно друга вдоль параллельной составляющей скорости и имеет конечное значение в любой точке струи. Он мал, если “скольжение” скоростей ($u_\beta - u_\alpha$) незначительно по сравнению с тепловым разбросом скоростей $(\alpha_{\alpha\beta})^{-1/2}$ (это реализуется в большинстве физически интересных ситуаций). В этом случае функцию $E(x, t; s, \gamma)$ можно разложить по степеням s и тем самым существенно упростить расчет интегралов (9). Обратная ситуация (значение s велико) реализуется в струе, где очень тяжелый компонент находится в малой примеси в легком носителе.

Параметр $\gamma = T_\|/T_\perp$ характеризует анизотропию функции распределения в пространстве скоростей и неограниченно возрастает с расстоянием от источника струи. При этом также возможно разложение функции E по степеням (γ–1) и упрощение выражений (9).

Таким образом, в настоящей работе на основе уравнения Больцмана для смеси одноатомных газов в приближении эллипсоидальной функции распределения для произвольного потенциала взаимодействия получена система уравнений для параметров стационарной сверхзвуковой струи, учитывающая влияние двухмерности течения вблизи оси струи. В дальнейшем эта система уравнений будет использована для анализа ряда практически интересных случаев – разгонки легкого и тяжелого компонентов струи и разности их температур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson J.B.* In Molecular beam and low density gas dynamics. N.Y., 1974. P. 1.
2. *Anderson J.B., Davidovits P.* //Science. 1975. **187**. N 4173. P. 642.
3. *Muntz E.P., Deglow T.L.* Proc. 11th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. Paris, 1979. **1**. P. 573.
4. *Schwartz M.H., Andres R.P.* //J. Aerosol Sciences. 1976. **7**. P. 2.
5. *Schwartz M.H., Andres R.P.* Proc. 10th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1977. **2**. P. 135.
6. *Iannotta S., Toccoli T., Biasioli F., Boschetti A., Ferrari M.* // Appl. Phys. Lett. 2000. **76**. N 14. P. 1845.

7. *Toccoli T., Boschetti A., Iannotta S.* //Phil. Magaz. B. 2002. **82**. N 4. P. 485.
8. *Iannotta S.*, *Toccoli T.* // J. Polymer Sci. 2003. **41**. P. 2501.
9. *Willis D.R*. Rept. Sand 78-8216, Sandia Lab., Albuquerque, New Mexico, 1978.
10. *Католика Р.Дж., Галлахер Р.Дж., Андерсон Дж.Б., Талбот Л.* //Ракетная техника и космонавтика. 1979. **17**. № 4. С. 32.
11. *Takahashi N., Moriya T., Teshima K.* Proc. 13th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1985. **2**. P. 939.
12. *Sharafutdinov R.G*., *BelikovA.E., Karelov N.V., Zarvin A.E.* Proc. 13th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1985. **2**. P. 931.
13. *Беликов А.Е., Сухинин Г.И., Шарафутдинов Р.Г.* Тез. докл. IX Всес. конф. по динамике разреженного газа. Свердловск, 1987. **2**. С. 100.
14. *Fitch P.S.H., Haynam C.A., Levy D.H.* //J. Chem. Phys. 1981. **74**. N 12. P. 6612.
15. *Пластинин Ю.А*., *Родионов А.В.* Тез. докл. IX Всес. конф. по динамике разреженного газа. Свердловск, 1987. **2**. С. 99.
16. *Hagena O.F.* In Molecular beam and low density gas dynamics. N. Y., 1974. P. 67.
17. *Смирнов Б.М.* //Успехи физических наук. 2003. **173**. № 6. С. 609.
18. *Hamel B.B., Willis D.R*. //Phys. Fluids. 1966. **9**. N 5. P. 829.
19. *Edwards R.H., Cheng M.K.* Proc. 5th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1967. **1**. P. 819.
20. *Freeman N.C., Thomas D.R.* Proc. 6th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N. Y., 1969. **1**. P. 163.
21. *Willis D.R*., *Hamel B.B.* Proc. 5th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1967. **1**. P. 837.
22. *Cooper A.L., Bienkowski J.K.* Proc. 5th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N. Y., 1967. **1**. P. 861.
23. *Anderson J.B*. //Entropie. 1967. N 18. P. 33.
24. *Miller D.R., Andres R.P.* Proc. 6th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics.N. Y., 1969. **2**. P. 1385.
25. *Raghuraman P.*, *Davidovits P.* //Phys. Fluids. 1978. **21**. N 9. P. 1485.
26. *Nanbu K.* //Phys. Fluids. 1979. **22**. N 5. P. 998.
27. *Кулезнев Е.В., Лазарев А.В., Трубников Д.Н.* //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 1987. **28**. С. 117.
28. *Ленин Л.В., Лазарев А.В., Трубников Д.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 1987. **28**. С. 347.
29. *Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н., Татаренко К.А., Прибытков А.В.* //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2006. **47**. С. 377.
30. *Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н., Татаренко К.А., Прибытков А.В.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2007. **48**. С. 235.
31. *Othmer P.W., Knuth E.L.* Proc. 13th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1985. **2**. P. 733.
32. *Toennies J.P., Winkelmann K.* //J.Chem.Phys. 1977. **66**. N 9. P. 3965.
33. *Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н.* //Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Химия. 2003. **44**. С. 238.
34. *Randenija L.K., Smith M.A.* //J.Chem.Phys. 1990. **93**. N 1. P. 661.
35. *Лазарев А.В., Жданов В.М., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н.* //ПМТФ. 1997. **38**. № 5. С. 65.
36. *Лазарев А.В., Застенкер Н.Н., Трубников Д.Н.* // Хим. физика. 2003. **22**. № 1. С. 10.
37. *Жданов В.М.* Явления переноса в многокомпонентной плазме. М., 1982.
38. *Шахов Е.М.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 2. С. 155.
39. *Robertson S.J., Willis D.R.* //AIAA Journal. 1971. **9**. N 2. P. 291.
40. *Ashkenas S.H., Sherman F.S.* Proc. 4th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics. N.Y., 1966. **2**. P. 84.
41. *Дулов В.Г., Лукьянов Г.А.* Газодинамика процессов истечения. Новосибирск, 1984. С. 50.

Поступила в редакцию 10.02.10

EQUATIONS FOR TRANSLATIONAL RELAXATION IN STEADY SUPERSONIC JET OF A MIXTURE OF MONOATOMIC GASES

A.V. Lazarev, N.N. Zastenker, D.N.Trubnikov

(Division of Physical Chemistry)

On the basis of the Boltzmann kinetic equation with the use of the ellipsoidal distribution function, the system of equations which takes into account a two-dimensional flow near to a nozzle has been derived for parameters of a supersonic steady jet expanding into vacuum.

Key words: *steady supersonic jet, Boltzmann equation, Grad moment method,translational relaxation.*

Сведения об авторах: *Лазарев Александр Владимирович* – вед. науч. сотр. кафедры физической химии химического факультета МГУ, канд. физ.-матем. наук (lazarev@phys.chem.msu.ru); *Застенкер Нина Николаевна* – ст. науч. сотр. кафедры физической химии химического факультета МГУ, канд. хим. наук (zastenker@mtu-net.ru); *Трубников Дмитрий Николаевич* – глав. науч. сотр. кафедры физической химии химического факультета МГУ, докт. хим. наук, профессор (tdn@phys.chem.msu.ru).