

Программа дисциплины «**Линейная алгебра**» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВПО к структуре и результатам освоения основных образовательных программ специалитета по профессиональному циклу по специальности 011000 - Химия.

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части блока математических и естественно-научных дисциплин, является обязательным курсом.

Курс предназначен для студентов **1-го курса** химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (**2-й семестр**). Программа курса линейной алгебры состоит из следующих основных разделов: системы линейных уравнений, векторные пространства, евклидово пространство, квадратичные формы, линейные преобразования, элементы теории групп. В первом из разделов изучаются методы решения систем линейных уравнений. Во втором разделе изучаются понятия векторного пространства, размерности пространства и его базиса, подпространства векторного пространства и применение этих понятий к решению систем линейных уравнений. В третьем разделе изучаются евклидовы пространства, т.е. пространства со скалярным произведением и геометрия таких пространств. В четвёртом разделе изучаются квадратичные формы, методы приведения их к главным осям и вопросы знакоопределённости квадратичных форм. В пятом разделе изучаются линейные преобразования, линейные операторы, собственные векторы и собственные значения. В шестом разделе изучаются элементы теории групп, конечные группы и теорема Лагранжа, рассматриваются примеры групп, связанных с кристаллохимией.

#### **Цели и задачи освоения дисциплины:**

- приобретение знаний, необходимых для эффективного использования быстро развивающихся математических методов
- получение навыка построения и исследования математических моделей химических процессов
- развитие математической культуры, достаточной для самостоятельного освоения в дальнейшем математических методов
- способность создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные математические результаты, владение знаниями об ограничениях и границах применимости моделей; способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания в области физики
- владение фундаментальными разделами математики, необходимыми для решения научно-исследовательских и практических задач в профессиональной области
- использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

#### **Требования к результатам освоения содержания дисциплины**

В результате освоения дисциплины студент должен

**Знать** основные понятия теории векторных пространств, определителей и матриц, евклидовых пространств, теории квадратичных форм и линейных преобразований, элементов теории групп;

**уметь** решать основные задачи линейной алгебры, используя эти понятия;

**владеть** аппаратом матричного анализа и теории определителей;

**иметь опыт** решения типовых задач, в том числе, имитирующих реальные проблемы, с которыми приходится сталкиваться в практике химических исследований.

#### **Структура дисциплины**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 77 часов, из них 48 часа – аудиторная нагрузка (16 часов лекций и 32 семинаров), самостоятельная работа 29 часов

Вид работы	Семестр	Всего
	1	

<b>Общая трудоёмкость, акад. часов</b>	77	77
<b>Аудиторная работа:</b>	48	
Лекции, акад. часов	16	16
Семинары, акад. часов	32	32
Лабораторные работы, акад. часов	-	
<b>Самостоятельная работа, акад. часов</b>	29	29(в перечне24)
<b>Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)</b>	зачёт	зачет

### 3.2. Содержание разделов дисциплины

№ раздела	Наименование раздела	Количество часов				Форма текущего контроля
		Всего	Аудиторная работа		Самостоятельная работа	
			Лекции	Семинары		
1	Системы линейных уравнений	10	2	4	4	ДЗ
2	Векторное пространство	16	4	8	4	дз
3	Евклидово пространство	12	2	6	4	КР
4	Квадратичные формы	10	2	4	4	дз
5	Линейные преобразования	14	4	6	4	дз
6	Элементы теории групп	10	2	4	4	дз
	<b>ИТОГО</b>	<b>77</b>	<b>16</b>	<b>32</b>	<b>29</b>	

(К – коллоквиум, Т – проверочная самостоятельная работа (тест), РК - рубежная контрольная работа, ДЗ – домашнее задание, РГЗ – расчетно-графическое задание)

### Планы лекций

#### Лекции

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений, их запись в матричной форме. Матрицы. Линейные операции над ними. Умножение матриц. Определители и их свойства. Разложение определителя по строке(столбцу). Обратная матрица. Правило Крамера. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
2	Векторные пространства	Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Изменение координат вектора при переходе к новому базису. Подпространство решений линейной однородной системы, его размерность и базис. Система линейных неоднородных уравнений. Теорема

		Кронекера-Капелли. Структура множества решений системы. Принцип суперпозиции решений.
3	Евклидово пространство	Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта. Определитель Грама.
4	Квадратичные формы	Линейные и билинейные функции. Квадратичные формы, их матрицы. Приведение квадратичной формы методом Лагранжа. Закон инерции. Критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы
5	Линейные преобразования	Комплексные числа, их сложение и умножение. Тригонометрическая форма комплексного числа. Теорема Муавра-Лапласа. Основная теорема алгебры. Линейные преобразования, их матрицы. Собственные значения, собственные векторы. Характеристический многочлен. Жорданова форма матрицы.
6	Элементы теории групп	Группы, примеры групп. Конечные группы, теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа, факторгруппа, гомоморфизм групп. Линейные представления групп, конечные группы вращений трёхмерного пространства вокруг неподвижной точки, циклические группы, диэдральные группы, группы вращений правильных многогранников.

Название раздела 1 Системы линейных уравнений	___ 2_ часа. Содержание лекции 1. Системы линейных уравнений, их запись в матричной форме. Матрицы. Линейные операции над ними. Умножение матриц. Определители и их свойства. Разложение определителя по строке(столбцу). Обратная матрица. Правило Крамера. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.
Название раздела 2 Векторное пространство	___ 2 часа. Содержание лекции 1. Определение векторного пространства( над действительными числами). Примеры векторных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.
	___ 2 часа.. Содержание лекции 2. Подпространство решений линейной однородной системы, его размерность и базис. Система линейных неоднородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Структура множества решений системы. Принцип суперпозиции решений.
Название раздела 3. Евклидово пространство.	___ 2 часа. Лекция 1. Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта. Определитель Грама.

Раздел 4. Квадратичные формы	2 часа Лекция 1. Линейные и билинейные функции. Квадратичные формы, их матрицы. Приведение квадратичной формы методом Лагранжа. Закон инерции. Критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичной формы.
Раздел 5 Линейные преобразования	2 часа Лекция 1. Комплексные числа, их сложение и умножение. Тригонометрическая форма комплексного числа. Теорема Муавра-Лапласа. Основная теорема алгебры. 2 часа Лекция 2. Линейные преобразования, их матрицы. Собственные значения, собственные векторы. Характеристический многочлен. Жорданова форма матрицы.
Раздел 6 Элементы теории групп	2 часа Лекция 1. Группы, примеры групп. Конечные группы, теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа, факторгруппа, гомоморфизм групп. Линейные представления групп, конечные группы вращений трёхмерного пространства вокруг неподвижной точки, циклические группы, диэдральные группы, группы вращений правильных многогранников.

#### Семинары (практические занятия)

№ раздела	№ занятия	Тема	Кол-во часов
1	1	Системы линейных уравнений, их запись в матричной форме. Матрицы. Линейные операции над ними. Умножение матриц.	2
1	2	Определители и их свойства. Разложение определителя по строке(столбцу). Обратная матрица. Правило Крамера. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.	2
2	1	Определение векторного пространства( над действительными числами). Примеры векторных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.	2
2	2	Размерность и базис векторного пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Изменение координат вектора при переходе к новому базису.	2
2	3	Подпространство решений линейной однородной системы, его размерность и базис.	2
2	4	Теорема Кронекера-Капелли. Структура множества решений системы. Принцип суперпозиции решений.	2
3	1	Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения. Ортогональный базис.	2

3	2	Процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта. Определитель Грама.	2
3	3	Контрольная работа	2
4	1	Линейные и билинейные функции. Квадратичные формы, их матрицы. Приведение квадратичной формы методом Лагранжа. Закон инерции.	2
4	2	Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональным преобразованием	2
5	1	Комплексные числа, их сложение и умножение. Тригонометрическая форма комплексного числа.	2
5	2	Теорема Муавра-Лапласа. Основная теорема алгебры. Извлечение корней из комплексных чисел	2
5	3	Линейные преобразования, их матрицы. Собственные значения, собственные векторы. Характеристический многочлен. Жорданова форма матрицы.	2
6	1	Группы, примеры групп. Конечные группы, теорема Лагранжа. Нормальная подгруппа, факторгруппа, гомоморфизм групп.	2
6	2	Линейные представления групп, конечные группы вращений трёхмерного пространства вокруг неподвижной точки, циклические группы, диэдральные группы, группы вращений правильных многогранников.	2

Лабораторные работы не предусмотрены

## ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### Примерный перечень задач к зачёту

#### Теоретические вопросы

1. Определители и их свойства
2. Матрицы и их свойства
3. Вычисление обратной матрицы
4. Векторные пространства. Примеры
5. Линейная зависимость и независимость векторов
6. Размерность и базис векторного пространства
7. Изменение координат вектора при переходе к новому базису
8. Система линейных уравнений. Правила Крамера.
9. Система линейных уравнений. Метод Гаусса.
10. Система линейных однородных уравнений.
11. Ранг матрицы.
12. Подпространство решений линейной однородной системы, его размерность и базис.
13. Система линейных неоднородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Структура множества решений системы. Принцип суперпозиции решений.

14. Евклидово пространство. Свойства скалярного произведения.
15. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта.
16. Линейные и билинейные функции.
17. Квадратичные формы, их матрицы.
18. Приведение квадратичной формы методом Лагранжа.
19. Закон инерции(без док-ва). Критерий Сильвестра знакоопределённости (без док-ва).
20. Линейные преобразования, их матрицы.
21. Собственные значения, собственные векторы. Характеристический многочлен.
22. Группы, примеры групп. Конечные группы, теорема Лагранжа.

### Расчетные задачи или тесты

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Найти координаты вектора  $x = (1,2)$  в базисе  $e_1 = (1,5), e_2 = (-1,-4)$ .

$$\text{Ответ: } x = -2e_1 - 3e_2 = -2(1,5) - 3(-1,-4)$$

3. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: Фундаментальная система решений } (0, 1, 1, 0), (1, 7, 0, -5).$$

$$\text{Фундаментальная система решений } (0, 1, 1, 0), (1, 7, 0, -5).$$

4. Ортогонализировать базис из векторов (1,1), (1,2).

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ответ: } \lambda = 1, \lambda = 4. \text{ (1,1); } (\xi - 2, \xi) \lambda = 1, \lambda = 4. \text{ (1,1); } (\xi - 2, \xi)$$

6. Привести к каноническому виду квадратичную

$$\text{форму } 7x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 7x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

$$\text{Ответ: } 3(x_1 + x_2)^2 + 5x_3^2 + (2x_1 - x_2)^2 \quad 3(x_1 + x_2)^2 + 5x_3^2 + (2x_1 - x_2)^2.$$

### УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

Основная литература (базовые учебники выделены курсивом, они имеются в библиотеке химического факультета). Контрольные экземпляры в электронном и бумажном виде хранятся на кафедре математического анализа (механико-математический факультет).

#### Основная литература

1. *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007* (серия “Классический университетский учебник)
2. *А.А. Михалёв, И.Х. Сабитов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. -М.: «Академия», 2013.*

3. И.И.Баврин. Краткий курс высшей математики.М.: Наука,Физматлит.-2003.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., Наука, 1984 (Дрофа, 2006).

**Дополнительная литература**

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1980 (Лань, 2008).
2. П.С.Александров. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М. : Наука,1979.