

Дисциплина «**Математический анализ**» относится к базовой части блока математических и естественно-научных дисциплин, является обязательным курсом.

Курс предназначен для студентов **1-го и 2-го курсов** химического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (**1 - 4-й семестры**). Программа курса «Математический анализ» состоит из следующих основных разделов: введение в анализ и теория действительных чисел; теория пределов, непрерывность функции одной переменной; дифференциальное исчисление функций одной переменной; неопределённый интеграл; определённый интеграл; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; числовые ряды; функциональные последовательности и ряды. Степенные ряды. Ряды Фурье; дифференциальные уравнения первого порядка; дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка; линейные дифференциальные уравнения; двойной и тройной интеграл; криволинейные интегралы; поверхностные интегралы.

Курс обеспечен электронными конспектами лекций, доступными на сайте факультета <http://www.chem.msu.su/rus/teaching/chirskii/welcome.html>

### **Цели и задачи освоения дисциплины:**

- приобретение знаний, необходимых для эффективного использования быстро развивающихся математических методов
- получение навыка построения и исследования математических моделей химических процессов
- развитие математической культуры, достаточной для самостоятельного освоения в дальнейшем математических методов
- способность создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные математические результаты, владение знаниями об ограничениях и границах применимости моделей; способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания в области физики
- владение фундаментальными разделами математики, необходимыми для решения научно-исследовательских и практических задач в профессиональной области
- использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

### **Требования к результатам освоения содержания дисциплины**

В результате освоения дисциплины студент должен

**знать** основные понятия и теоремы математического анализа

**уметь** решать задачи математического анализа, используя эти основные понятия;

**владеть** аппаратом дифференциального и интегрального исчисления функций одного и нескольких переменных;

**иметь опыт** решения типовых задач, в том числе, имитирующих реальные проблемы, с которыми приходится сталкиваться в практике химических исследований.

## Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 576 часов, из них 324 часа – аудиторная нагрузка (170 часов лекций и 154 семинаров), самостоятельная работа 252 часа

Вид работы	Семестр	Семестр	Семестр	Семестр	Всего
	1	2	3	4	
<b>Общая трудоёмкость, акад. часов</b>	180	144	108	144	576
<b>Аудиторная работа:</b>	108	80	72	64	324
Лекции, акад. часов	54	48	36	32	170
Семинары, акад. часов	54	32	36	32	154
<b>Самостоятельная работа, акад. часов</b>	72	64	36	80	252
<b>Вид итогового контроля (зачёт, зачёт с оценкой, экзамен)</b>	Зачёт, экзамен	экзамен	Зачёт, экзамен	экзамен	

### Лекции

№	Наименование раздела	Содержание раздела
1	Введение в анализ и теория действительных чисел	Множества и операции над ними. Декартово произведение множеств, бинарные отношения. Отображения и их свойства. Множество действительных чисел. Аксиома отделимости Верхние и нижние грани. Стягивающиеся отрезки. Предельные точки. Приближённые вычисления.
2	теория пределов, непрерывность функции одной переменной	Предел последовательности, предел функции. Бесконечно малые. Арифметические свойства предела. Предельный переход в неравенствах. Вычисление $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ . Предел монотонной ограниченной функции. Число $e$ . Критерий Коши существования предела последовательности, предела функции. Непрерывность, точки разрыва. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Символы $a, 0$ . Вычисление пределов $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ Промежуточные значения непрерывной на отрезке функции. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
3	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	Производные элементарных функций. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производная функции, заданной параметрически. Дифференциал. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля. Необходимые условия экстремума Теоремы Лагранжа и Коши. Критерий постоянства функции. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано. Разложения функций $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^n$ . Правила Лопиталья. Монотонность

		функции. Достаточные условия экстремума функции. Выпуклость графика функции.
4 / 2 сем-р	Неопределённый интеграл	Неопределённый интеграл и его основные свойства. Таблица неопределённых интегралов. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование некоторых иррациональных функций и некоторых тригонометрических функций.
5	Определённый интеграл	Площадь плоской фигуры. Определённый интеграл. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости. Интегрируемость монотонной функции. Интегрируемость непрерывной функции. Свойства определённого интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определённых интегралов. Приложения интеграла: объём тела, длина дуги кривой и площадь поверхности вращения.
6	Несобственные интегралы	Несобственные интегралы и обобщение понятия площади плоской фигуры. Сходимость некоторых интегралов. Теоремы о сравнении для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Абсолютно сходящиеся интегралы. Условно сходящиеся интегралы.
7	Дифференциальное исчисление функций многих переменных	Пространство $\mathbf{R}^n$ , множества в нём. Функции, отображения, их пределы и непрерывность. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости функции. Дифференциал. Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Касательная плоскость. Производная по направлению. Градиент. Производные и дифференциалы высших порядков. Формулы Тейлора. Экстремумы функций нескольких переменных. Неявная функция. Система неявных функций (без док-ва). Условный экстремум.
8 / 3 сем-р	Числовые ряды	Числовые ряды. Критерий Коши сходимости. Свойства сходящихся рядов. Ряды с неотрицательными членами. Теоремы сравнения. Признаки Даламбера, Коши. Признак Гаусса (без доказательства). Интегральный признак сходимости. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ . Абсолютная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Условная сходимость. Теорема Лейбница.
9	Функциональные ряды	Равномерная сходимость функциональной последовательности, ряда. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование ряда. Ортонормированные системы функций. Обобщённые ряды Фурье. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема о сходимости (без док-ва).
10	Степенные ряды	Степенные ряды. Радиус сходимости. Непрерывность суммы. Почленное интегрирование и дифференцирование. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

11	Дифференциальные уравнения	<p>Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение <math>y' = f(x, y)</math>. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (без док-ва). Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения. Простейшие дифференциальные уравнения химической кинетики. Уравнения вида <math>y' = f\left(\frac{ax+by+c}{kx+ly+m}\right)</math>. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, не разрешённые относительно производной. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро. Дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка. Задача Коши для уравнения <math>y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})</math>. Понижение порядка дифференциального уравнения.</p>
12	Линейные дифференциальные уравнения	<p>Линейные дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка. Свойства линейного однородного дифференциального уравнения <math>n</math>-го порядка. Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения <math>n</math>-го порядка. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения <math>n</math>-го порядка. Принцип суперпозиции решений. Метод вариации постоянных. Линейное однородное дифференциальное уравнение <math>n</math>-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение. Метод неопределённых коэффициентов для нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения <math>n</math>-го порядка с постоянными коэффициентами.</p>
13 / 4 сем-р	Двойной и тройной интегралы	<p>Двойной интеграл, его основные свойства. Вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл в полярных координатах. Вычисление интеграла <math>\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx</math>. Тройной интеграл, его основные свойства. Вычисление тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.</p>
14	Криволинейные и поверхностные интегралы	<p>Криволинейный интеграл 1-го типа. Криволинейный интеграл 2-го типа. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути на плоскости. Признак полного дифференциала на плоскости. Площадь поверхности, заданной явным уравнением. Интегралы по поверхности 1-го типа. Двусторонние поверхности. Интегралы по поверхности 2-го типа. Формула Остроградского. Формула Стокса.</p>
15	Элементы теории поля	<p>Векторная запись формулы Остроградского. Векторная запись формулы Стокса. Скалярные и векторные поля, Определение и основные свойства <math>grad</math>, <math>div</math>, <math>rot</math>, потока и циркуляции. Соленоидальное поле. Векторная трубка в нём. Потенциальное поле.</p>

### Семинары (практические занятия)

№ раздела	№ занятия	Тема
1 / 1 семестр	1,2	Эскизы графиков элементарных функций векторами
	3	Приближённые вычисления
	4-8	Вычисление пределов
2	9	Контрольная работа
	10	Исследование непрерывности функции
	11	Равномерная непрерывность
	12	коллоквиум
3	13-17	Вычисление производных
	18-21	Построение графиков
	22-23	Задачи практического содержания
	24-25	Использование формулы Тейлора для приближённых вычислений и исследования асимптотики
	26	Правила Лопиталя
	27	Контрольная работа
	4 / 2 семестр	1-3
5	4-5	Вычисление определённых интегралов
6	6-8	Исследование сходимости и вычисление несобственных интегралов
	9	Контрольная работа
7	10-11	Вычисление частных производных и дифференциалов первого и высших порядков
	12-13	Исследование на экстремум
	14-15	Неявная функция и условный экстремум
	16	Контрольная работа
8/3 семестр	1-3	Исследование рядов на сходимость
9	4-5	Область сходимости. Равномерная сходимость
	6	Ряды Фурье
10	7-8	Разложения в степенные ряды
	9	Контрольная работа
11	10-11	Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения. Простейшие дифференциальные уравнения химической кинетики.
	12	Линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение Бернулли

	13	Уравнения, не разрешённые относительно производной. Уравнение Лагранжа, уравнение Клеро.
	14	Понижение порядка дифференциального уравнения.
12	15	Линейная зависимость функций. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -го порядка.
	16	Линейные неоднородные дифференциальные уравнения $n$ -го порядка. Принцип суперпозиции решений. Метод вариации постоянных.
	17	Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами
	18	Контрольная работа
13/4 семестр	1,2	Вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл в полярных координатах.
	3,4	Вычисление тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
	5	Контрольная работа
14	6,7	Криволинейный интеграл 1-го типа. Криволинейный интеграл 2-го типа.
	8,9	Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути на плоскости. Признак полного дифференциала на плоскости.
	10	Площадь поверхности, заданной явным уравнением. Интегралы по поверхности 1-го типа
	11-12	Интегралы по поверхности 2-го типа. Формула Остроградского. Формула Стокса.
	13	Контрольная работа
15	14-15	Векторная запись формулы Остроградского. Векторная запись формулы Стокса. Основные свойства <i>grad</i> , <i>div</i> , <i>rot</i> , потока и циркуляции.
	16	Соленоидальное поле. Векторная трубка в нём. Потенциальное поле.

## Примеры домашних заданий

### 1 семестр

1. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y = e^{1/x+1}$$

3. Вычислить производную функции:

$$y = x^{\sqrt{x}} + \arctg(\ln x) + \ln(\arctg x)$$

4. Написать уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$$

в точке  $(-2;5)$  .

5. Построить график функции:

$$y = \frac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$$

## 2-й семестр

1. Найти интеграл

$$\int \ln x dx \int \ln x dx$$

2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi/2} (\sin t)^3 dt \int_0^{\pi/2} (\sin t)^3 dt$$

3. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

4. Найти

$$d^2(e^{xy^2}) d^2(e^{xy^2})$$

5. Найти экстремумы функции

$$z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2) z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

6. Найти экстремум функции

$$z = x + 2yz = x + 2y$$

при условии

$$x^2 + y^2 = 5 \quad x^2 + y^2 = 5$$

## 3 семестр

1. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3+1}{n^2} \quad ?$$

2. Сходится ли ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ?$$

3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(4n-2)^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(4n-2)^2}$$

4. Разложить

$$\sqrt{x}\sqrt{x}$$

в ряд по степеням  $x - 4x - 4$ .

5. Разложить в ряд Фурье в интервале

$$(\pi, \pi) (\pi, \pi)$$

функцию

$$\sin ax \quad \sin ax$$

6. Решить уравнение

$$xy' + y = e^{xy} xy' + y = e^{xy}$$

7. Указать вид частного решения уравнения

$$y'' + 2y' + y = e^{2x} y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

#### 4 семестр

1. Вычислить

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, \text{ где } D - D -$$

ограничена кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0. (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0.$$

2. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями, заданными

$$\text{уравнениями: } z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

$$z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

3. Преобразовать интеграл .

$$\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz \int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$$

к цилиндрическим координатам и вычислить.

4. Вычислить

$$\int_C y^2 ds \int_C y^2 ds, \text{ где}$$

$$C: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$C: x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

5. Вычислить

$$\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

$$\int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz,$$

где

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

6. Найти площадь, ограниченную кривой:

$$x = a(\cos t)^3, y = a(\sin t)^3, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$x = a(\cos t)^3, y = a(\sin t)^3, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

7. Вычислить

$$\iint_S yz dy \wedge dz + xz dz \wedge dx + xy dx \wedge dy,$$

$$\iint_S yz dy \wedge dz + xz dz \wedge dx + xy dx \wedge dy,$$

где  $S - S$  - внешняя сторона тетраэдра, ограниченного плоскостями

$$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a. x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a.$$

8. Вычислить

$$\oint_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz,$$

$$\oint_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz,$$

где  $C - C$  – окружность:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0.$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0.$$

9. Имеет ли потенциал векторное поле:

$$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}?$$

$$\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}?$$

### Основная литература

1. В.И. Гаврилов, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. Математический анализ. М.: «Академия». -2013.- 336 с.
2. И.И. Баврин. Краткий курс высшей математики. М.: Физматлит. - 2003.-327с.
3. Г.С. Бараненков, Б.П. Демидович, В.А. Ефименко и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов.-М.: Астрель.-2008.-495с.
4. Б.П. Демидович, В.П. Моденов. Дифференциальные уравнения. С.Пб.: Иван Фёдоров.-2003.
5. Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа, т.1,2. М.: Альфа, 1998.

### Дополнительная литература

1. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ, т.1,2. М.: Изд. Моск. ун-та, 1985
2. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.
3. В.Г. Скатецкий, Д.В. Свиридов, В.И. Яшкин. Математические методы в химии. Мн.: Тетрасистемс, 2006.-368 с.
4. А.И. Козко и др. Математические методы решения химических задач.-М.: «Академия». -2013.- 367 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.: УРСС. 2006.